BAN TỔ CHỨC KÌ THI

TUYỂN TẬP ĐỀ THI OLYMPIC

30 THÁNG 4 LẦN THỨ XIV – 2008

TOÁN

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LỜI NÓI ĐẦU

Mỗi năm cứ vào dịp tháng 4, tháng kỉ niệm Miền Nam hoàn toàn giải phóng, đất nước thống nhất, các em học sinh giỏi lớp 10 và 11 của các trường THPT chuyên và không chuyên của các tỉnh miền Nam, miền Trung và Tây nguyên lại nô nức tham dự kì thi OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4. Kì thi đầu tiên được tổ chức vào năm học 1994-1995 theo sáng kiến của trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Thành phố Hồ Chí Minh. Từ đó đến nay kì thi đã được tổ chức liên tục với quy mô ngày càng lớn, chất lượng ngày càng cao.

Tháng 4 năm 2008, kì thi OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4 LẦN THỨ XIV lại được tổ chức tại trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong Thành phố Hồ Chí Minh sau 2 năm tổ chức tại các tỉnh miền Trung. Kì thi năm nay có quy mô rất lớn gồm 2.500 thí sinh thuộc 72 trường, tham gia tranh tài đủ 10 môn thi: Toán, Lí, Hóa, Sinh, Tin học, Ngữ văn, Sử, Địa, Tiếng Anh và Tiếng Pháp.

Sau khi thi ban tổ chức đã tập hợp, sắp xếp lại bộ đề chính thức và các đề thi đề nghị của các trường tham dự. Đây là một tư liệu có giá trị, rất cần thiết cho quý thầy cô và các em học sinh tham khảo trong quá trình giảng dạy và học tập. Ban tổ chức đã phối hợp với Nhà sách Hồng Ân Thành phố Hồ Chí Minh và Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm xuất bản bộ sách: TUYỂN TẬP ĐỀ THI OLYMPIC 30/4 LẦN THỨ XIV – 2008. Bộ sách gồm 10 tập, mỗi tập là một môn thi. Trong mỗi tập sách gồm có 2 phần chính:

Phần I: Là đề thi chính thức và đề thi đề nghị khối 10

Phần II: Là đề thi chính thức và đề thi đề nghị khối 11.

Chúng tôi xin trân trọng giới thiệu bộ sách: **TUYỂN TẬP ĐỀ THI OLYMPIC 30/4 LẦN THỨ XIV – 2008** với quý đọc giả. Hi vọng rằng đây là những tư liệu có giá trị giúp cho quý thầy cô và các em học sinh trong công tác bồi dưỡng học sinh giỏi và trong việc tự học tập, tự rèn luyện.

Chúc quý thầy cô và các em học sinh đạt nhiều thành công.

Ban tổ chức

Phần I

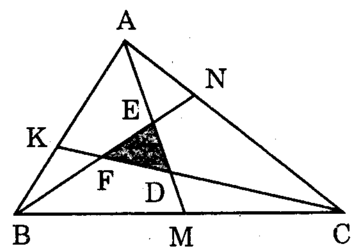
TOÁN 10

ĐỀ THI CHÍNH THỨC TOÁN 10 OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4 LẦN XIV – NĂM 2008

Câu 1: *(4 điểm)*

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - z = 7 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 37 \\ x^3 + y^3 - z^3 = 1. \end{cases}$$



Đáp án

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy. \end{cases}$

Hệ trở thành $\begin{cases} u - z = 7 & (1) \\ u^2 - 2v - z^2 = 37 & (2) \\ u^3 - 3uv - z^3 = 1 & (3) \end{cases}$ *0,5đ*

Từ (1) suy ra $z = u - 7$. Thay vào (2) ta được $v = 7u - 43$ *1đ*

Thay z và v vào (3) ta được $18u = 342 \Rightarrow u = 19$.

Do đó $v = 90$, $z = 12$ *1đ*

Với $\begin{cases} u = 19 \\ v = 90 \end{cases}$ tìm được $\begin{cases} x = 9 \\ y = 10 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \end{cases}$ *1đ*

Thử lại, ta thấy hệ có 2 nghiệm là (9; 10; 12) hay (10; 9; 12). *0,5đ*

Câu 2: *(4 điểm)*

Cho tam giác ABC có diện tích S. Trên các cạnh BC, CA và AB lần lượt lấy các điểm M, N và K sao cho

$$30\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0},\ 4\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \text{ và } 14\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}.$$

Gọi D là giao điểm của AM và CK, E là giao điểm của BN và AM, F là giao điểm của CK và BN.

Hãy tính diện tích của tam giác DEF theo S.

Đáp án

Theo đề bài ta có: M là điểm nằm giữa B và C, N là điểm nằm giữa C và A, K là điểm nằm giữa B và A và MC = 30MB, NC = 4NA và KB = 14KA.

Ta có: $\dfrac{S_{BFC}}{S_{BCN}} \cdot \dfrac{S_{BCN}}{S_{ABC}} = \dfrac{BF}{BN} \cdot \dfrac{CN}{CA}$ (1) *0,5đ*

$$NC = 4NA \Rightarrow \frac{CN}{CA} = \frac{4}{5} \qquad (2)$$

Áp dụng Menelauft vào ΔABN với cát tuyến KFC ta có:

$$\frac{FB}{FN}.\frac{CN}{CA}.\frac{KA}{KB} = 1 \Rightarrow \frac{FB}{FN} = \frac{CA}{CN}.\frac{KB}{KA} = \frac{5}{4}.14 = \frac{35}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{BF}{BN} = \frac{35}{37} \qquad (3)$$ *0,5đ*

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{S_{BFC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BFC}}{S_{BCN}}.\frac{S_{BCN}}{S_{ABC}} = \frac{BF}{BN}.\frac{CN}{CA} = \frac{35}{37}.\frac{4}{5} = \frac{28}{37}$

$$\Rightarrow S_{BFC} = \frac{28}{37}S \qquad (4)$$ *1đ*

Tương tự ta có:

$$S_{ACD} = \frac{30}{451}S \quad (5) \quad \text{và} \quad S_{ABE} = \frac{1}{35}S \quad (6)$$ *1đ*

Do đó $S_{DEF} = S - (S_{ADC} + S_{ABE} + S_{BCF}) = \frac{86528}{584045}S.$ *1đ*

Câu 3: (*4 điểm*)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n và với mọi số thực $x \in (0; 1)$ ta đều có: $x^2 \cdot \sqrt[n]{1-x} \le \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}$.

Đáp án

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$x^{2n}(1-x) \le \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} \times \frac{1}{2n+1},$$ *1đ*

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2n + 1 số dương

$\frac{x}{2n}, \frac{x}{2n}, \ldots, \frac{x}{2n}$, $1 - x$ ta được: *1,5đ*

$$\sqrt[2n+1]{\left(\frac{x}{2n}\right)^{2n}(1-x)} \le \frac{\frac{x}{2n} \times 2n + 1 - x}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

Suy ra $\left(\frac{x}{2n}\right)^{2n}(1-x) \le \frac{1}{(2n+1)^{2n+1}}$ *1đ*

$$\Leftrightarrow x^{2n}(1-x) \le \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} \times \frac{1}{2n+1}$$ *0,5đ*

Câu 4: *(4 điểm)*

Tìm tất cả các số nguyên dương *m* thỏa mãn điều kiện

$\forall a \in Z, \forall b \in Z, a^2 \equiv b^2 \pmod{m} \Rightarrow a \equiv \pm b \pmod{m}$

Đáp án

Trước hết nhận xét nếu m = 1 hoặc m là số nguyên tố thì $\forall a \in Z$, $\forall b \in Z$, $a^2 \equiv b^2 \pmod{m} \Rightarrow a \equiv \pm b \pmod{m}$ (1) *1đ*

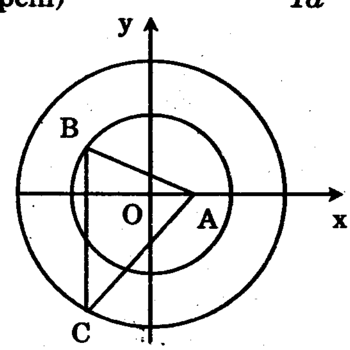
Chứng minh nhận xét trên:

* Nếu m = 1 thì hiển nhiên có (1)

* Xét m nguyên tố. Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ thỏa $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$

Khi đó $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \vdots m \Rightarrow a - b \vdots m$ hay $a + b \vdots m$ (vì m nguyên tố)

$\Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$ hoặc $a \equiv -b \pmod{m}$ (đpcm) *1đ*



* Xét m ≠ 1 và m không nguyên tố. Ta sẽ chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để có (1) là m = 2p với p là 1 số nguyên tố lẻ.

Điều kiện cần: Giả sử (1) đúng. Vì m là hợp số nên m = x.y với x, $y \in N^*\backslash\{1\}$. Lấy a = x + y , b = x − y (a, b ∈ Z), ta có $a^2 - b^2 = 4xy = 4m \vdots m \Rightarrow$ $a^2 \equiv b^2 \pmod{m} \Rightarrow a \equiv \pm b \pmod{m}$ (do (1))

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2y = (a-b) \vdots m = xy \\ 2x = (a+b) \vdots m = xy \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \vdots x \\ 2 \vdots y \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2. \end{array}\right.$$

Vậy m = 2n với $n \in N^* \setminus \{1\}$. *0,5đ*

Nếu n là 1 hợp số thì $n = \alpha.\beta$ với $\alpha, \beta \in N^* \setminus \{1\} \Rightarrow m = (2\alpha).\beta$ với $2\alpha \neq 2 \Rightarrow \beta = 2$ (theo chứng minh trên) $\Rightarrow m = 4\alpha$

Lúc này chọn $a = 2\alpha$, b = 0. Dễ thấy $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$ nhưng $a \pm b \equiv 0 \pmod{m}$ (vô lý). Vậy n = p là 1 số nguyên tố.

Hơn nữa nếu p = 2 thì m = 4, theo chứng minh trên (với $\alpha = 1$, $m = 4\alpha$), ta thấy (1) không thỏa ⇒ p lẻ. *0,5đ*

Điều kiện đủ: Cho m = 2p với p là một số nguyên tố lẻ và cho a, b ∈ Z mà $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$

⇒ a và b có cùng tính chẵn lẻ $\Rightarrow (a - b) \vdots 2$ và $(a + b) \vdots 2$ *0,5đ*

Mặt khác, $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \vdots m \vdots p$

$\Rightarrow (a - b) \vdots p$ hoặc $(a + b) \vdots p$.

Vậy theo (3), ta có $(a - b) \vdots 2p = m$ hoặc $(a + b) \vdots 2p = m \Rightarrow (1)$.

Vậy m = 1, hoặc m nguyên tố, hoặc m = 2p với p là một số nguyên tố lẻ. *0,5đ*

Câu 5: *(4 điểm)*

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(1; 0) và các đường tròn

(C_1): $x^2 + y^2 = 2$, (C_2): $x^2 + y^2 = 5$.

Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt nằm trên các đường tròn (C_1) và (C_2) để tam giác ABC có diện tích lớn nhất (biết rằng tam giác như vậy là tồn tại).

Đáp án

Giả sử ΔABC có diện tích lớn nhất. Ta có $CO \perp AB$ và $BO \perp AC$, vì nếu không, chẳng hạn CO không vuông góc với AB thì tồn tại điểm C' thuộc đường tròn (C_2) sao cho $C'O \perp AB$ và $d(C', AB) > d(C, AB)$

$\Rightarrow S_{C'AB} > S_{CAB}$ (vô lý).

Do đó nếu ΔABC có diện tích lớn nhất thì ABC phải là tam giác nhận O làm trực tâm: $BC \perp OA$. *1,5đ*

Gọi $B(x_B; y_B)$ và $C(x_C; y_C)$. Vì $BC \perp OA$ nên $x_B = x_C$.

$\overrightarrow{AB} = (x_B - 1; y_B)$ $\overrightarrow{OC} = (x_B; y_C)$ $\overrightarrow{OB} = (x_B; y_B)$ $\overrightarrow{AC} = (x_B - 1; y_C)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = x_B(x_B - 1) + y_B y_C = 0 & (1) \\ x_B^2 + y_B^2 = 2 & (2)\ (*) \\ x_B^2 + y_C^2 = 5 & (3) \end{cases}$$ *0,5đ*

Từ (2) và (3) $\Rightarrow y_B^2 = 2 - x_B^2$ và $y_C^2 = 5 - x_B^2$ (4)

Từ (1) $\Rightarrow y_B y_C = x_B - x_B^2 \Rightarrow y_B^2 y_C^2 = x_B^2 - 2x_B^3 + x_B^4$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \left(2 - x_B^2\right)\left(5 - x_B^2\right) = x_B^2 - 2x_B^3 + x_B^4$

$\Leftrightarrow 2x_B^3 - 8x_B^2 + 10 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x_B + 1\right)\left(2x_B^2 - 10x_B + 10\right) = 0$

$\Leftrightarrow x_B = -1$ (6) hay $x_B = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}$ (7) hay $x_B = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}$ (8) *1đ*

Thế (7) vào (2) không thỏa. Suy ra (7) loại

Ta có (dùng (4) và (5)):

$$S = \frac{1}{2}|x_A - x_B||y_C - y_B| \Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}(1 - x_B)^2(7 - 2x_B)$$

Với $x_B = -1$ ta có $S = 3$ Với $x_B = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}$ ta có: $S < 3$ *0,5đ*

Vậy S lớn nhất $\Leftrightarrow x_B = x_C = -1$.

Khi đó ta có $\begin{cases} y_B y_C = -2 \\ y_B^2 = 1 \quad \text{và} \quad y_C^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_B = 1 \\ y_C = -2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} y_B = -1 \\ y_C = 2 \end{cases}$

Vậy với $B_1(-1; 1)$ và $C_1(-1; -2)$ hoặc $B_2(-1; -1)$ và $C_2(-1; 2)$ thì diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất và max S = 3. *0,5đ*

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 1: *(... điểm)*

Giải phương trình

$$16x^6 - 16x^5 - 20x^4 + 20x^3 + 5x^2 + 2x - 7 = 0$$

Đáp án

Ta có $16x^6 - 16x^5 - 20x^4 + 20x^3 + 5x^2 + 2x - 7 = 0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 16x^5 - 20x^3 + 5x + 7 = 0 \qquad (2) \end{array}\right.$$

Giải (2): * Nếu $|x| \le 1$ thì có duy nhất một số $\alpha \in [0; \pi]$ sao cho $x = \cos\alpha$ thì (2) trở thành $\cos 5\alpha + 7 = 0$ (vô nghiệm)

* Nếu $|x| > 1$ thì xét phương trình $x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ (3)

Ta có: (3) $\Leftrightarrow f(t) = t^2 - 2xt + 1 = 0$ có $\Delta' = x^2 - 1 > 0$ nên (3) có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2.

+ $x > 1$: $f(1) = 2 - 2x = 2(1 - x) < 0$ và $f(0) = 1 > 0$ nên $0 < t_1 < 1 < t_2$.

+ $x < -1$: $f(-1) = 2 + 2x = 2(1 + x) < 0$ và $f(0) = 1 > 0$

nên $t_1 < -1 < t_2 < 0$.

Do đó (3) có nghiệm t duy nhất thỏa $|t| > 1$

Suy ra nếu $|x| > 1$ thì có duy nhất một số thực t thỏa $|t| > 1$ và

$$x = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$$

Ta có $x^3 = \frac{1}{8}\left(t^3 + \frac{1}{t^3} + 6x\right) \Rightarrow t^3 + \frac{1}{t^3} = 8x^3 - 6x$ và

$$x^2 = \frac{1}{4}\left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 2\right) \Rightarrow t^2 + \frac{1}{t^2} = 4x^2 - 2$$

$$\Rightarrow \left(t^3 + \frac{1}{t^3}\right)\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) = (8x^3 - 6x)(4x^2 - 2)$$

$$\Rightarrow t^5 + \frac{1}{t^5} + t + \frac{1}{t} = 2(16x^5 - 20x^3 + 6x)$$

$$\Rightarrow t^5 + \frac{1}{t^5} = 2(16x^5 - 20x^3 + 5x)$$

$$\Rightarrow 16x^5 - 20x^3 + 5x = \frac{1}{2}\left(t^5 + \frac{1}{t^5}\right)$$

Do đó (2) thành $\frac{1}{2}\left(t^5 + \frac{1}{t^5}\right) + 7 = 0$ (4) ($|t| > 1$)

Đặt $u = t^5$ thì (4) thành $u^2 + 14u + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -7 + 4\sqrt{3} \text{ (loại)} \\ u = -7 - 4\sqrt{3} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt[5]{-7 - 4\sqrt{3}}$$

Do đó ta được:

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{-7 - 4\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[5]{-7 - 4\sqrt{3}}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{-7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt[5]{-7 + 4\sqrt{3}}\right)$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$ hoặc

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{-7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt[5]{-7 + 4\sqrt{3}}\right)$$

Câu 2: *(... điểm)*

Cho 30 số nguyên dương liên tiếp trong đó không có số nào có tổng các chữ số chia hết cho 11. Chứng minh rằng trong 30 số đó tồn tại một số chia hết cho 10^6.

Đáp án

Trong 10 số đầu tiên của 30 số trên, ta luôn chọn được một số có chữ số tận cùng là 9, gọi số đó là $\overline{a9}$.

* Xét 10 số $\overline{(a+1)0}$; $\overline{(a+1)1}$; $\overline{(a+1)2}$; ...; $\overline{(a+1)9}$

Do các số trên có tổng các chữ số là các số nguyên liên tiếp, trong đó không có số nào chia hết cho 11 nên (a + 1) có tổng các chữ số chia cho 11 dư 1.

Gọi m là tổng các chữ số của (a + 1) thì $m \equiv 1 \pmod{11}$ (1)

* Xét 10 số $\overline{(a+2)0}$; $\overline{(a+2)1}$; $\overline{(a+2)2}$; ...; $\overline{(a+2)9}$

Lí luận tương tự ta có (a + 2) có tổng các chữ số chia cho 11 dư 1.

Gọi k là *số* chữ số 9 tận cùng của $\overline{(a+1)9}$ ($k \geq 1$)

$$\Rightarrow \overline{(a+1)9} = \overline{b\underbrace{99....9}_{k \text{ số } 9}} \Rightarrow \overline{(a+2)0} = \overline{(a+1)9} + 1$$

$$= \overline{b\underbrace{99....9}_{k \text{ số } 9}} + 1 = \overline{(b+1)\underbrace{0....0}_{k \text{ số } 0}}$$

Do $\overline{(a+1)9}$ có tổng các chữ số của nó là m + 9 và có k chữ số 9 tận cùng nên tổng các chữ số của $\overline{(a+2)0}$ bằng m + 9 – 9k + 1 = m + 10 – 9k.

Ta có $m - 9k + 10 \equiv 1 \pmod{11}$ và $m \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow 9k \equiv 10 \pmod{11} \Rightarrow k \equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow k \geq 6$

Vì $\overline{(a+2)0}$ có ít nhất k số 0 tận cùng $\Rightarrow$ $\overline{(a+2)0}$ chia hết cho 10^6.

Câu 3: *(... điểm)*

Bên trong tam giác đều ABC lấy điểm A_1. Bên trong tam giác A_1BC lấy điểm A_2. Gọi S_1; S_2 và p_1; p_2 lần lượt là diện tích và nửa chu vi của hai tam giác A_1BC và A_2BC.

Chứng minh: $S_1.p_2^2 > S_2p_1^2$.

Đáp án

Ta kí hiệu:

a là cạnh tam giác ABC; a, b_1, c_1 là cạnh tam giác A_1BC; a, b_2, c_2 là cạnh tam giác A_2BC, A_1, B_1, C_1 là ba góc tam giác A_1BC; A_2, B_2, C_2 là ba góc tam giác A_2BC; r_1, r_2 là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác A_1BC, A_2BC.

Không giảm tổng quát, ta chỉ xét trường hợp C, A_1, A_2 thẳng hàng (nếu không thẳng hàng, ta xét qua trung gian A_3 là giao của BA_2 với CA_1 và sử dụng hai lần kết quả) (hoặc B, A', A" thẳng hàng: tương tự).

Khi đó: ĐPCM $\Leftrightarrow \dfrac{r_1}{r_2} > \dfrac{p_1}{p_2}$

Ta có: $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{p_1 - c_1}{p_2 - c_2}$ (do $\dfrac{r_1}{p_1 - c_1} = \text{tg}\dfrac{\widehat{A_1CB}}{2} = \text{tg}\dfrac{\widehat{A_2CB}}{2} = \dfrac{r_2}{p_2 - c_2}$)

Suy ra ta cần chứng minh: $\dfrac{p_1 - c_1}{p_2 - c_2} > \dfrac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow p_1c_2 > p_2c_1$

$\Leftrightarrow (a + b_1 + c_1)c_2 > (a + b_2 + c_2)c_1$

$\Leftrightarrow (a + b_1)c_2 > (a + b_2)c_1 \Leftrightarrow \dfrac{c_2}{c_1} > \dfrac{a + b_2}{a + b_1}$

Ta có: $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{CA_2}{BA_2}.\dfrac{BA_1}{CA_1}.\dfrac{BA_2}{BA_1} = \dfrac{\sin B_2}{\sin C_2}.\dfrac{\sin C_1}{\sin B_1}.\dfrac{c_2}{c_1} = \dfrac{\sin B_2}{\sin B_1}.\dfrac{c_2}{c_1}$

(do $C_2 = C_1 = A_1CB$)

Do đó: ĐPCM $\Leftrightarrow \dfrac{b_2}{b_1}.\dfrac{\sin B_1}{\sin B_2} > \dfrac{a + b_2}{a + b_1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin B_2}{\sin B_1}.\dfrac{\sin B_1}{\sin B_2} > \dfrac{\sin A_2 + \sin B_2}{\sin A_1 + \sin B_1}$

$\Leftrightarrow \sin A_1 + \sin B_1 > \sin A_2 + \sin B_2$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A_1 + B_1}{2}\cos\frac{A_1 - B_1}{2} > 2\sin\frac{A_2 + B_2}{2}\cos\frac{A_2 - B_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A_1 - B_1}{2} > \cos\frac{A_2 - B_2}{2} \quad (1)\ (\text{Vì } A_1 + B_1 = A_2 + B_2 = 180^\circ C)$$

Mà $0^0 < \frac{A_1 - B_1}{2} < \frac{A_2 - B_2}{2} < 90^0$ nên $\Rightarrow$ (1) đúng.

Câu 4: *(... điểm)*

Cho a, b, c là 3 số dương thỏa a + b + c + 1 = 4abc.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^4 + b + c} + \frac{1}{b^4 + c + a} + \frac{1}{c^4 + a + b} \le \frac{3}{a + b + c}$$

Đáp án

$$\frac{1}{a^4 + b + c} + \frac{1}{b^4 + c + a} + \frac{1}{c^4 + a + b} \le \frac{3}{a + b + c} \quad (1)$$

Ta có $a^4 + b + c = \frac{(a^2)^2}{1} + \frac{(b^2)^2}{b^3} + \frac{(c^2)^2}{c^3} \ge \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{1 + b^3 + c^3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^4 + b + c} \le \frac{1 + b^3 + c^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Do đó vế trái (1) $\le \frac{3 + 2(a^3 + b^3 + c^3)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$.

Ta chứng minh $\frac{3 + 2(a^3 + b^3 + c^3)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \le \frac{3}{a + b + c}$ (2)

Ta có (2) $\Leftrightarrow (a + b + c)[3 + 2(a^3 + b^3 + c^3)] \le 3(a^2 + b^2 + c^2)^2$ (3)

Đặt $S = a + b + c$ và $P = ab + bc + ca$ thì

$$a^2 + b^2 + c^2 = S^2 - 2P$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)((a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$
$$= S(S^2 - 3P) + 3abc = S^3 - 3PS + 3abc.$$

(3) $\Leftrightarrow S[3 + 2(S^3 - 3PS + 3abc)] \le 3(S^2 - 2P)^2$

$\Leftrightarrow 3S + 2S^4 - 6PS^2 + 6abcS \le 3S^4 - 12PS^2 + 12P^2$

$\Leftrightarrow S^4 - 6PS^2 - 6abcS + 12P^2 - 3S \ge 0$

$\Leftrightarrow S^4 - 6PS^2 + 9P^2 + 3P^2 - 6abcS - 3S \ge 0$

$\Leftrightarrow (S^2 - 3P)^2 + (P^2 - 3S) + 2(P^2 - 3abcS) \ge 0$ (4)

Theo giả thiết ta có:

$$4abc \geq 4\sqrt[4]{abc} \text{ suy ra: } abc \geq 1 \text{ nên}$$

$$P^2 = (ab + bc + ca)^2 \leq 3abc(a + b + c) = 3abcS \geq 3S$$

$$\Rightarrow P^2 - 3abcS \geq 0 \text{ và } P^2 - 3S \geq 0$$

Suy ra (4) đúng. Vậy (1) được chứng minh.

Câu 5: *(... điểm)*

Chứng minh rằng với mỗi dãy 2008 số thực $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2008}$ luôn tồn tại số thực x sao cho tất cả các số hạng của dãy số: $a_1 + x, a_2 + x, a_3 + x, ..., a_{2008} + x$ là những số vô tỉ.

Đáp án

Gọi α là một số vô tỉ bất kì.

Ta chứng minh trong 2009 số $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, ..., 2008\alpha, 2009\alpha$ có một số thỏa điều kiện bài toán.

Ta thiết lập 2009 dãy số và sắp xếp dưới dạng bảng sau:

$a_1 + \alpha,$ $\quad a_2 + \alpha,$ $\quad a_3 + \alpha, ...,$ $\quad a_{2008} + \alpha$

$a_1 + 2\alpha,$ $\quad a_2 + 2\alpha,$ $\quad a_3 + 2\alpha, ...,$ $\quad a_{2008} + 2\alpha$

$a_1 + 3\alpha,$ $\quad a_2 + 3\alpha,$ $\quad a_3 + 3\alpha, ...,$ $\quad a_{2008} + 3\alpha$

....

....

$a_1 + 2008\alpha,$ $\quad a_2 + 2008\alpha,$ $\quad a_3 + 2008\alpha, ...,$ $\quad a_{2008} + 2008\alpha$

$a_1 + 2009\alpha,$ $\quad a_2 + 2009\alpha,$ $\quad a_3 + 2009\alpha, ...,$ $\quad a_{2008} + 2009\alpha$

Giả sử trong 2009 hàng trên *không có hàng nào thỏa yêu cầu bài toán* thì trong mỗi hàng sẽ có ít nhất một số hữu tỉ. Do đó sẽ có ít nhất 2009 số hữu tỉ, mà chỉ có 2008 cột nên phải tồn tại một cột chứa ít nhất 2 số hữu tỉ trong 2009 số hữu tỉ trên. Giả sử cột thứ k chứa 2 số hữu tỉ là:

$$a_k + m\alpha \text{ và } a_k + n\alpha \ (m > n)$$

Khi đó ta có $(a_k + m\alpha) - (a_k + n\alpha) = (m - n)\alpha$ là số hữu tỉ. Điều này vô lí vì $m - n \in N^*$ và α là số vô tỉ.

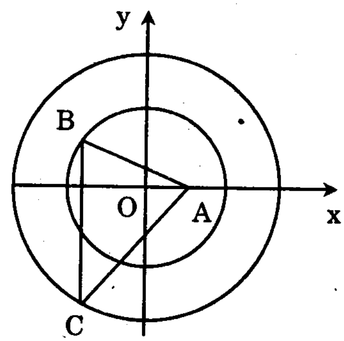
Vậy trong các hàng trên, phải có một hàng thỏa yêu cầu bài toán.

Giả sử hàng đó là hàng thứ p, khi đó $x = p\alpha$ là số thực thỏa điều kiện bài toán.

Câu 6: *(... điểm)*

Cho điểm A(1; 0) và hai đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 = 2$; (C_2): $x^2 + y^2 = 5$. Xét tam giác ABC có B thuộc (C_1) và C thuộc (C_2). Tìm tọa độ B, C để diện tích của tam giác ABC lớn nhất.

Đáp án



Giả sử ΔABC có diện tích lớn nhất. Ta có $CO \perp AB$ và $AO \perp BC$, vì nếu không, chẳng hạn CO không vuông góc với AB thì tồn tại điểm C' thuộc đường tròn (C_2) sao cho $C'O \perp AB$ và d(C', AB) > d(C, AB) $\Rightarrow S_{C'AB} > S_{CAB}$ (vô lý).

Do đó nếu ΔABC có diện tích lớn nhất thì ABC phải là tam giác nhận O làm trực tâm.

Gọi $B(x_B; y_B)$ và $C(x_C; y_C)$. Vì $BC \perp OA$ nên $x_B = x_C$.

$\overrightarrow{AB} = (x_B - 1; y_B)$ $\overrightarrow{OC} = (x_B; y_C)$ $\overrightarrow{OB} = (x_B; y_B)$ $\overrightarrow{AC} = (x_B - 1; y_C)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = x_B(x_B - 1) + y_B y_C = 0 & (1) \\ x_B^2 + y_B^2 = 2 & (2) \\ x_B^2 + y_C^2 = 5 & (3) \end{cases} \quad (*)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow y_B^2 = 2 - x_B^2$ và $y_C^2 = 5 - x_B^2$ (4)

Từ (1) $\Rightarrow y_B y_C = x_B - x_B^2 \Rightarrow y_B^2 y_C^2 = x_B^2 - 2x_B^3 + x_B^4$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \left(2 - x_B^2\right)\left(5 - x_B^2\right) = x_B^2 - 2x_B^3 + x_B^4$

$$\Leftrightarrow 2x_B^3 - 8x_B^2 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x_B + 1\right)\left(2x_B^2 - 10x_B + 10\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_B = -1 \quad (6)$$

$$\text{hay } x_B = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \quad (7)$$

$$\text{hay } x_B = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \quad (8)$$

Thế (7) vào (2) không thỏa. Suy ra (7) loại

Ta có $S = \frac{1}{2}|x_A - x_B|.|y_B - y_C|$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}(1 - x_B)^2(y_B^2 + y_C^2 - 2y_By_C) = \frac{1}{4}(1 - x_B)^2(7 - 2x_B)$$

Với $x_B = -1$ ta có $S = 3$

Với $x_B = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ta có $S \approx 0,4$

Vậy S lớn nhất $\Leftrightarrow x_B = x_C = -1$.

Khi đó ta có $\begin{cases} y_By_C = -2 \\ y_B^2 = 1 \quad \text{và} \quad y_C^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_B = 1 \\ y_C = -2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} y_B = -1 \\ y_C = 2 \end{cases}$.

Vậy với $B_1(-1; 1)$ và $C_1(-1; -2)$ hoặc $B_2(-1; -1)$ và $C_2(-1; 2)$ thì diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất và Max S = 3.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT TP. CAO LÃNH – ĐỒNG THÁP

Câu 1: *(3 điểm)*

Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x+1}+1=x^3+3x^2+2x$.

Đáp án

* $\sqrt[3]{2x+3}+1=x^3+3x^2+2x \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+3}=(x+1)^2-x-2$

* Đặt: $y+1=\sqrt[3]{2x+3} \Rightarrow (y+1)^3=2x+3$ (1) *0,5đ*

* Phương trình trở thành: $y+1=(x+1)^3-x-2$

$\Rightarrow (x+1)^3=x+y+3$ (2) *0,5đ*

* Lấy (2) – (1) vế theo vế: $(x+1)^3-(y+1)^3=y-x$ *0,5đ*

$\Leftrightarrow (x-y)[(x+1)^2+(x+1)(y+1)+(y+1)^2+1]=0$

$\Leftrightarrow x=y$ *0,5đ*

Vì $(x+1)^2+(x+1)(y+1)+(y+1)^2+1>0$ với mọi x, y.

* Thay x = y vào (1) ta được:

$(x+1)^3=2x+3 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+x-1)=0$ *0,5đ*

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$ *0,5đ*

* Vậy phương trình có ba nghiệm là $x=-2; x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Câu 2: *(4 điểm)*

Tìm tất cả các số tự nhiên x và y thỏa mãn phương trình:

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4=3361-\sqrt{11296320}$$

Đáp án

Nhận thấy x và y là các số nguyên không âm và

$\sqrt{11296320}=2^3.41.\sqrt{105}$ là số vô tỉ:

Phương trình đã cho có thể viết lại:

$(x+y)^2+4xy-3361=4(x+y)\sqrt{xy}-328\sqrt{105}$ (1) *1đ*

Vế trái của (1) là các số hữu tỉ nên điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm nguyên là cả hai vế của (1) đều bằng không. Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+y)^2 + 4xy - 3361 = 0 \\ 4(x+y)\sqrt{xy} - 328\sqrt{105} = 0\end{cases} \qquad \textit{1đ}$$

Đặt: $S = x + y$, $P = xy$ ta được hệ:

$$\begin{cases}S^2 + 4P - 3361 = 0 & (2) \\ S\sqrt{P} = 82\sqrt{105} & (3)\end{cases}$$

Từ (3) ta rút ra được: $P = \dfrac{82^2.105}{S^2}$. Thay vào (2) và thu gọn được:

$$S^4 - 3361.S^2 + 4.82^2.105 = 0$$

$$\Leftrightarrow S^2 = 1681 \text{ hoặc } S^2 = 1680 = 41^2 \qquad \textit{1đ}$$

Từ đó ta được: $S = 41$ và $P = 420$.

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 42t + 420 = 0 \Leftrightarrow t = 20 \text{ hoặc } t = 21. \qquad \textit{1đ}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là (20; 21); (21; 20).

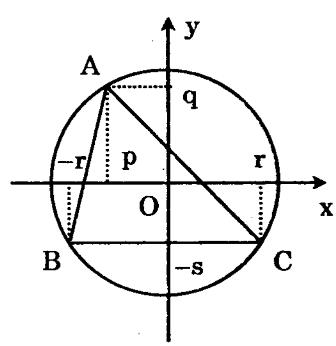
Câu 3: *(3 điểm)*

Cho ABC là một tam giác nhọn có trọng tâm G và trực tâm H không trùng nhau.

Chứng minh rằng đường thẳng GH song song với đường thẳng BC khi và chỉ khi:

$$tgB + tgC = 2tgA ..$$

Đáp án



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ:

$A(p, q)$, $B(-r, -s)$,

$C(r, -s)$ $(r > 0; s > 0; q > 0)$ *0,5đ*

Ta có: $G\left(\dfrac{p}{3}; \dfrac{q-2s}{3}\right)$

và $\quad p^2 + q^2 = r^2 + s^2 \quad (2) \quad$ *0,5đ*

Do O, G, H thẳng hàng nên GH//BC khi và chỉ khi $y_G = 0$

$\Leftrightarrow q - 2s = 0 \quad (3) \quad$ *0,5đ*

Với tam giác ABC ta có: $tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC$

Do đó: $tgB + tgC = 2tgA \Leftrightarrow tgB.tgC = 3 \quad (4) \quad$ *0,5đ*

Ta có: $tgB = \frac{q+s}{p+r}$; $tgC = -\frac{q+s}{p-r}$;

$$tgB.tgC = \frac{(q+s)^2}{r^2-p^2} = \frac{(q+s)^2}{q^2-s^2} \text{ (do (2))}$$

Hay: $tgB.tgC = \frac{q+s}{q-s}$ (5) *0,5đ*

Nếu GH//BC thì từ (3) cho q = 2s. Từ (5) suy ra tgB.tgC = 3.

Do (4) mà tgB + tgC = 2tgA *0,5đ*

Nếu tgB + tgC = 2tgA thì từ (4) và (5) cho q = 2s.

Do (3) mà GH//BC. *0,5đ*

Câu 4: ***(4 điểm)***

Cho cặp số thực (x; y) thoả mãn điều kiện: $x - 2y + 4 = 0$

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 12y + 45} + \sqrt{x^2 + y^2 - 10x - 16y + 89}$$

Đáp án

* Biến đổi: $P = \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2}$ *0,5đ*

* Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, gọi d là đường thẳng có phương trình $x - 2y + 4 = 0$ và các điểm M(x; y), A(3; 6), B(5; 8) thì P = MA + MB *0,5đ*

* Bài toán trở thành tìm toạ độ điểm M thuộc d sao cho tổng MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất *0,5đ*

* Dễ dàng kiểm tra A, B nằm về cùng một phía của d

Tìm được toạ độ của điểm A', đối xứng của A qua d, đó là A'(5; 2)

0,5đ

* Với M thuộc d, ta có: MA + MB = MA' + MB ≥ A'B (không đổi)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A', M, B thẳng hàng hay M chính là giao điểm của d với đường thẳng A'B *0,5đ*

* Tìm được phương trình của đường thẳng A'B là: $x - 5 = 0$ *0,5đ*

* Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 5 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$ cho $M(5; \frac{9}{2})$ *0,5đ*

* Vậy Min P = 6 khi x = 5 và $y = \frac{9}{2}$ *0,5đ*

Câu 5: *(3 điểm)*

Với 6 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chia hết cho 5 gồm 11 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 4 lần, chữ số 2 có mặt 3 lần, chữ số 3 có mặt 2 lần, chữ số 4 có mặt 1 lần và tổng số lần xuất hiện của chữ số 0 và chữ số 5 là 1.

Đáp án

Để số cần lập $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}}$ chia hết cho 5, thì x phải tận cùng bằng chữ số 0 hoặc chữ số 5. *0,5đ*

Vì tổng số lần xuất hiện trong x của 0 và 5 bằng 1 nên nếu x tận cùng bằng 0, thì 5 không có mặt và ngược lại nếu x tận cùng bằng 5, thì chữ số 0 không xuất hiện. *0,5đ*

Bởi vậy a_i $(1 \le i \le 10)$ chỉ có thể là một trong các chữ số 1, 2, 3, 4. *0,5đ*

Do đó số khả năng lập phần đầu độ dài 10 $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}}$ của số x bằng số hoán vị lặp của 10 phần tử thuộc 4 loại chữ số 1, 2, 3, 4 với 1 xuất hiện 4 lần, 2 xuất hiện 3 lần, 3 xuất hiện 2 lần và 4 xuất hiện 1 lần, sẽ bằng P(1, 2, 3, 4). *1đ*

Ngoài ra a_{11} lại có thể nhận giá trị 0 hoặc 5 nên số cần tìm sẽ là:

$$2P(1, 2, 3, 4) = \frac{10!}{1!2!3!4!}.2 = 25200 \qquad 0{,}5đ$$

Câu 6: *(3 điểm)*

Trong mặt phẳng vvới hệ tọa độ (Oxy) cho tam giác ABC có B(1; 2). Đường phân giác trong Δ của góc A có phương trình: 2x + y − 1 = 0, khoảng cách từ C đến Δ bằng hai lần khoảng cách từ B đến Δ. Tìm tọa độ của A và C, biết rằng C nằm trên trục tung.

Đáp án

* Gọi H, I là các hình chiếu vuông góc của B và C lên Δ, BH cắt AC tại M.

Ta có: d(B, Δ) = BH = HM, d(C, Δ) = CI

Mà d(C, Δ) = 2 d(B, Δ)

⇔ CI = 2HM, nên: MA = MC, HA = HI *0,5đ*

* BH qua B(1; 2) nhận $\vec{u}_\Delta = (1, -2)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: x − 2y + 3 = 0

* Tọa độ của H nghiệm của phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{5} \\ y = \dfrac{7}{5} \end{cases}, H\left(-\frac{7}{5}; \frac{4}{5}\right) \qquad 0{,}5đ$$

* H là trung điểm của BM

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = 2x_H - x_B = -\dfrac{7}{5} \\ y_M = 2y_H - x_B = \dfrac{4}{5} \end{cases}, \; M\left(-\dfrac{7}{5};\ \dfrac{4}{5}\right) \qquad \textit{0,5đ}$$

* $BH = \sqrt{(-\dfrac{1}{5} - 1)^2 + (\dfrac{7}{5} - 2)^2} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow CI = \dfrac{6\sqrt{6}}{5}$ *0,5đ*

* C thuộc trục tung nên: $C(0;\ y_0)$, do đó

$$CI = \frac{|y_0 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow |y_0 - 1| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 7 \\ y_0 = -5 \end{array}\right. \qquad \textit{0,5đ}$$

Do M là trung điểm của AC nên:

$$C(0;7) \Rightarrow A(-\frac{14}{5}; -\frac{27}{5})$$

$$C(0;\ -5) \Rightarrow A(-\frac{14}{5};\ \frac{33}{5})$$

* Thử lại chỉ có $A(-\dfrac{14}{5}; \dfrac{33}{5}) \in \Delta$.

Vậy: $A\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{33}{5}\right)$; $C(0;\ -5)$ *0,5đ*

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẠC LIÊU

Câu 1: *(3 điểm)*

Giải phương trình:

$$\sqrt{11x^2 - 14x + 9} + \sqrt{11x^2 - 2x + 3} + \sqrt{17x^2 + 2x + 3} = \sqrt{2}(2x + 4) \quad (1)$$

Đáp án

Ta có:

$$\sqrt{(3x-1)^2 + 2(2-x)^2} + \sqrt{(3x-1)^2 + 2(1+x)^2} + \sqrt{(3x-1)^2 + 2(2x+1)^2}$$

$\geq \sqrt{2}(2x + 4)$ *1,5đ*

Gọi S là vế trái của PT ta có:

$$S = \sqrt{2}\,(2x + 4) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ 2 - x \geq 0 \\ 1 + x \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$ *1,5đ*

Câu 2: *(4 điểm)*

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của PT:

$$\frac{|4x - 6y| + |9x - 6y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{313} \quad (1)$$

Đáp án

Ta thấy (x, y) = (0, 0) không là nghiệm của PT

Với x, y khác 0: (1) $\Leftrightarrow |4x - 6y| + \left||9x - 6y| = \sqrt{313(x^2 + y^2)}\right|$ (2) *0,5đ*

Ta dễ dàng chứng minh được: $|A| + |B| = \begin{cases} |A + B|\,(A.B \geq 0) \\ |A - B|\,(A.B < 0) \end{cases}$ *0,5đ*

Nếu $(4x - 6y)(9x - 6y) \geq 0$ thì: (2) $\Leftrightarrow |13x - 12y| = \sqrt{313(x^2 + y^2)}$

$\Leftrightarrow 144x^2 + 2.13.12xy + 169y^2 = 0 \Leftrightarrow 12x + 13y = 0$

Vì (12, 13) = 1 nên (x, y) = (13k; −12k) với $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *1,5đ*

Nếu $(4x - 6y)(9x - 6y) < 0$ thì:

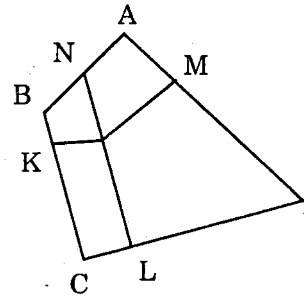
(2) $\Leftrightarrow |5x| = \sqrt{313(x^2 + y^2)} \Leftrightarrow 288x^2 + 313y^2 = 0$(VN) *1đ*

Vậy nghiệm của PT là (x; y) = (13k; −12k) với k là số nguyên khác không. *0,5đ*

Câu 3: *(3 điểm)*

Cho ABCD là tứ giác nội tiếp và P là một điểm thuộc miền trong của tứ giác ABCD. Gọi K, L, M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh BC, CD, DA, AB .

Hãy xác định vị trí của P sao cho tổng $BK^2 + CL^2 + AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Đáp án

Đặt $S = BK^2 + CL^2 + AM^2 + AN^2$

Áp dụng định lý Pitago ta có:

$$S = BN^2 + CK^2 + DL^2 + AM^2$$

1đ

Suy ra:

$$2S = (BK^2 + KC^2) + (CL^2 + LD^2) + (DM^2 + MA^2) + (AN^2 + NB^2)$$

$$\Rightarrow 2S \geq \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KC})^2 + (\overrightarrow{CL} + \overrightarrow{LD})^2 + (\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA})^2 + (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB})^2\right]$$

$$\Leftrightarrow S \geq \frac{1}{4}(BC^2 + CD^2 + DA^2 + AB^2)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{KC}, \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{LD}, \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NB}$. *1,5đ*

Vậy tổng S nhỏ nhất khi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. *0,5đ*

Câu 4: *(4 điểm)*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\frac{x^{30}}{y^4} + \frac{y^{30}}{z^4} + \frac{z^{30}}{t^4} + \frac{t^{30}}{x^4}$

Trong đó x, y, z, t là các số dương thỏa mãn: $x + y + z + t = 2008$

Đáp án

Ta có: $\frac{x^{30}}{y^4.502^{25}} + 4y + 25.502 \geq 30x$

$$\frac{y^{30}}{z^4.502^{25}} + 4z + 25.502 \geq 30y$$

2đ

$$\frac{z^{30}}{t^4.502^{25}} + 4t + 25.502 \geq 30z$$

$$\frac{t^{30}}{x^4 502^{25}} + 4x + 25.502 \geq 30t$$

Cộng theo từng vế các BĐT trên ta có:

$$\frac{x^{30}}{y^4} + \frac{y^{30}}{z^4} + \frac{z^{30}}{t^4} + \frac{t^{30}}{x^4} \geq 4.502^{26}$$ *1đ*

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = t = 502$

Vậy GTNN của biểu thức là 4.502^{26}. *1đ*

Câu 5: *(3 điểm)*

Tính tổng: $A = 1 + \frac{1}{2}C_{2008}^{1} + \frac{1}{3}C_{2008}^{2} + ... + \frac{1}{2009}C_{2008}^{2008}$

Đáp án

Ta có: $C_{n+1}^{p} = \frac{n+1}{p}C_{n}^{p-1} \Rightarrow \frac{1}{p}C_{n}^{p-1} = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{p}$ *1đ*

Cho p lần lượt các giá trị 1, 2, 3, ...2009 và cộng theo vế ta được: *1đ*

$$A = \frac{1}{2009}(C_{2009}^{1} + C_{2009}^{2} + ...C_{2009}^{2009}) = \frac{2^{2009}-1}{2009}$$ *1đ*

Câu 6: *(3 điểm)*

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn: $4MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = 6a^2$

Đáp án

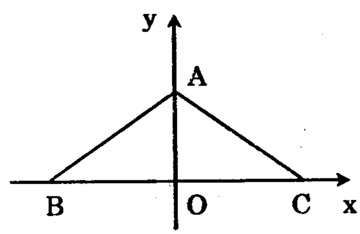
Chọn hệ toạ độ Oxy: $B(-\frac{a}{2}, 0)$, $C(\frac{a}{2}, 0)$, $A(0, \frac{a\sqrt{3}}{2})$

Giả sử $M(x, y)$

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (-x, \frac{a\sqrt{3}}{2} - y)$

$\overrightarrow{MB} = (-\frac{a}{2} - x, -y)$

$\overrightarrow{MC} = (\frac{a}{2} - x, -y)$



Suy ra: $4MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = 6a^2$

$$\Leftrightarrow 4\left[x^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - y^2\right)\right] - 2\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - 2y^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 - y^2 = 6a^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 3a^2 - 4a\sqrt{3}y + 4y^2 - \frac{a^2}{2} - 2ax -$$ *1,5đ*

$$-2x^2 - 2y^2 - \frac{a^2}{4} + ax - x^2 - y^2 = 6a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - ax - 4a\sqrt{3}y = \frac{15a^2}{4} \Leftrightarrow (x - \frac{a}{2})^2 + (y - 2a\sqrt{3})^2 = 16a^2$$

Dễ thấy I là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{CI} = 4\overrightarrow{OA}$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm $I(\frac{a}{2}; 2a\sqrt{3})$ bán kính 4a. *0,5đ*

Đáp án

Đặt $\dfrac{4x-1}{3} = y$ suy ra: $\left[y+\dfrac{1}{2}\right]+[y] = \dfrac{4y-1}{3}$ *0,5đ*

Do $\left[y+\dfrac{1}{2}\right] = [2y]-[y]$, suy ra: $[2y] = \dfrac{4y-1}{3}$ *1đ*

Đặt $\dfrac{4y-1}{3} = t$ suy ra: $\left[\dfrac{3t+1}{2}\right] = t$

suy ra: $t \le \dfrac{3t+1}{2} < t+1 \Rightarrow t = -1; t = 0$ *0,5đ*

$\Rightarrow y = \dfrac{-1}{2}$ hoặc $y = \dfrac{1}{4}$

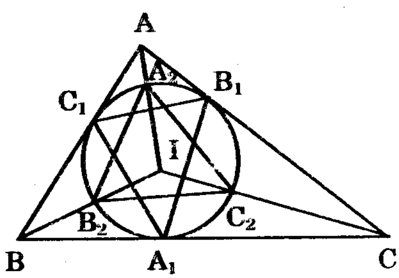
$\Rightarrow x = \dfrac{-1}{8}$ hoặc $x = \dfrac{7}{16}$ *1đ*

Câu 3: *(3 điểm)*

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính r. Đường tròn (I; r) tiếp xúc với các cạnh BC, AC, AB tại các điểm tương ứng A_1, B_1, C_1. Các tia IA, IB, IC cắt đường tròn (I; r) theo thứ tự tại A_2, B_2, C_2. Gọi p, p_1, p_2 lần lượt là nửa chu vi của các tam giác ABC; $A_1B_1C_1$; $A_2B_2C_2$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh: $\dfrac{r}{R}.p \le p_1 \le p_2$

Đáp án



Đặt BC = a, AC = b, AB = c; $B_1C_1 = a_1$, $A_1C_1 = b_1$, $A_1B_1 = c_1$, $B_2C_2 = a_2$; $A_2C_2 = b_2$, $A_2B_2 = c_2$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A, B, C lần lượt là số đo các góc $\widehat{BAC}$; $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$; A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là số đo các góc $\widehat{B_1A_1C_1}$, $\widehat{A_1B_1C_1}$, $\widehat{B_1C_1A_1}$, $\widehat{B_2C_2A_2}$, $\widehat{A_2B_2C_2}$, $\widehat{B_2C_2A_2}$.

Chứng minh được:

$$A_2 = \frac{B_1+C_1}{2};\ B_2 = \frac{A_1+C_1}{2};\ C_2 = \frac{A_1+B_1}{2}$$

và $$A_1 = \frac{B+C}{2};\ B_1 = \frac{A+C}{2};\ C_1 = \frac{A+B}{2}.$$

Xét $a_2 + b_2 + c_2 = 2r(\sin A_2 + \sin B_2 + \sin C_2)$

$$= 2r.\left(\sin\frac{B_1 + C_1}{2} + \sin\frac{A_1 + C_1}{2} + \sin\frac{A_1 + B_1}{2}\right)$$

$\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq$

$$2r.\left(\sin\frac{B_1 + C_1}{2}.\cos\frac{B_1 - C_1}{2} + \sin\frac{A_1 + C_1}{2}\cos\frac{A_1 - C_1}{2} + \sin\frac{A_1 + B_1}{2}\cos\frac{A_1 - B_1}{2}\right)$$

Do đó: $a_2 + b_2 + c_2 \geq 2r(\sin A_1 + \sin B_1 + \sin C_1) = a_1 + b_1 + c_1$.

Suy ra: $p_2 \geq p_1$ (1)

Mặt khác: $a_1 + b_1 + c_1 = 2r(\sin A_1 + \sin B_1 + \sin C_1)$

$$= 2r.\left(\sin\frac{B + C}{2} + \sin\frac{A + C}{2} + \sin\frac{A + B}{2}\right)$$

$\Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 \geq$

$$2r.\left(\sin\frac{B + C}{2}.\cos\frac{B - C}{2} + \sin\frac{A + C}{2}.\cos\frac{A - C}{2} + \sin\frac{A + B}{2}.\cos\frac{A - B}{2}\right)$$

hay $a_1 + b_1 + c_1 \geq 2r.(\sin A + \sin B + \sin C) = \dfrac{r}{R}(a + b + c)$.

Suy ra: $p_1 \geq \dfrac{r}{R}.p$ (2)

Két hợp (1) và (2) ta được: $\dfrac{r}{R}.p \leq p_1 \leq p_2$. Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Câu 4: *(4 điểm)*

Cho a, b, c là các số dương thỏa $\dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = a + b + c$.

Đáp án

Vì $\dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$ nên:

$$T = a + b + c = \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c)$$

$$= \frac{3b}{a} + \frac{2a}{b} + \frac{3c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{2c}{b} + 6$$ *1đ*

Vì a, b, c dương nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{3b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 2\sqrt{6},\ \frac{3c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2\sqrt{3},\ \frac{b}{c} + \frac{2c}{b} \geq 2\sqrt{2}.$$

Suy ra: $T \geq 2(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})+6=(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)^2$ *2đ*

$$T=(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3b}{a}=\dfrac{2a}{b} \\ \dfrac{3c}{a}=\dfrac{a}{c} \\ \dfrac{b}{c}=\dfrac{2c}{b} \\ \dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c\sqrt{3} \\ b=c\sqrt{2} \\ \dfrac{3}{c\sqrt{3}}+\dfrac{2}{c\sqrt{2}}+\dfrac{1}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3+\sqrt{3}+\sqrt{6} \\ b=2+\sqrt{2}+\sqrt{6} \\ c=1+\sqrt{2}+\sqrt{3} \end{cases}$$ *0,5đ*

Vậy $T_{min}=(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)^2$ khi $\begin{cases} a=3+\sqrt{3}+\sqrt{6} \\ b=2+\sqrt{2}+\sqrt{6} \\ c=1+\sqrt{2}+\sqrt{3} \end{cases}$ *0,5đ*

Câu 5: *(3 điểm)*

Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3,..., 280\}$. Đặt $A_1 = \{k \in S \mid k$ chia hết cho $2\}$; $A_2 = \{k \in S \mid k$ chia hết cho $3\}$; $A_3 = \{k \in S \mid k$ chia hết cho $5\}$; $A_4 = \{k \in S \mid k$ chia hết cho $7\}$ và $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

Tính số phần tử của tập A.

Đáp án

Ta có:

Gọi số phần tử của A_k là $|A_k|$

Ta có: $|A_1| = 140$; $|A_2| = 93$; $|A_3| = 56$; $|A_4| = 40$

$A_1 \cap A_2 = \{k \in S \mid k$ chia hết cho $6\} \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 46$

$A_1 \cap A_3 = \{k \in S \mid k$ chia hết cho $10\} \Rightarrow |A_1 \cap A_3| = 28$

$A_1 \cap A_4 = \{k \in S \mid k$ chia hết cho $14\} \Rightarrow |A_1 \cap A_4| = 20$

$A_2 \cap A_3 = \{k \in S \mid k$ chia hết cho $15\} \Rightarrow |A_2 \cap A_3| = 18$

$A_2 \cap A_4 = \{k \in S \mid k$ chia hết cho $21\} \Rightarrow |A_2 \cap A_4| = 13$

$A_3 \cap A_4 = \{k \in S \mid k$ chia hết cho $21\} \Rightarrow |A_3 \cap A_4| = 8$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{k \in S \mid k$ chia hết cho $30\}$

$\Rightarrow |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 9$

$A_1 \cap A_2 \cap A_4 = \{k \in S \mid k$ chia hết cho $42\}$

$\Rightarrow |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 6$

$A_1 \cap A_3 \cap A_4 = \{k \in S \mid k$ chia hết cho $42\}$

$\Rightarrow |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2$

$A_1 \cap A_3 \cap A_4 = \{k \in S \mid k$ chia hết cho $70\}$

$\Rightarrow |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 4$

$A_1 \cap A_3 \cap A_3 \cap A_4 = \{k \in S \mid k$ chia hết cho $210\}$

$\Rightarrow |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$

Do đó:

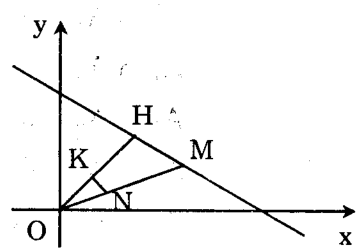
$$\begin{aligned}|A| &= |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - (|A_1 \cap A_2| \\ &\quad + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + \\ &|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\ &\quad + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|) = 216\end{aligned}$$

Vậy A có 216 phần tử.

Câu 6: *(3 điểm)*

Cho đường thẳng (Δ): $3x + 4y - 25 = 0$, điểm M chạy trên (Δ). Trên tia OM lấy N sao cho OM.ON = 1. Chứng minh rằng N chạy trên một đường tròn cố định, viết phương trình đường tròn đó.

Đáp án



- Gọi H là hình chiếu của O lên (Δ), K là điểm thuộc tia OH sao cho OH.OK = 1. Ta có OH.OK = OM.ON = 1, suy ra tứ giác MNKH nội tiếp, do đó $\widehat{ONK} = 90^0$.

  Vậy N thuộc đường tròn (C) đường kính OK cố định. *1đ*

- Dễ dàng tìm được H = (3; 4) $\Rightarrow \overrightarrow{OH} = (3; 4)$. *0,5đ*
- Vì $\overrightarrow{OK}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OH}$ nên $\overrightarrow{OK} = (3m; 4m)$, m > 0. *0,5đ*
- Ta có: $1 = OH.OK = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK} = 9m + 16m = 25m$.

  Suy ra $m = \frac{1}{25}$. Vậy $K = \left(\frac{3}{25}; \frac{4}{25}\right)$. *0,5đ*
- Giả sử N = (x;y). N thuộc đường tròn đường kính OK khi và chỉ khi $\overrightarrow{KN}.\overrightarrow{ON} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{25}\right)x + \left(y - \frac{4}{25}\right)y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{3}{25}x - \frac{4}{25}y = 0.$$

Đây chính là phương trình đường tròn (C). *0,5đ*

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN KON TUM

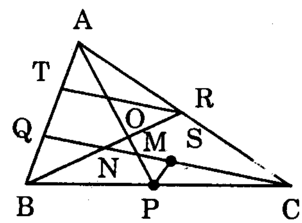
Câu 1: *(... điểm)*

Cho tam giác ABC. Hai đường trung tuyến AP, BR và đường cao CQ cắt nhau tại ba điểm O, M, N. Chứng minh rằng:

$$\frac{S_{OMN}}{S} = \frac{(\cot gA - \cot gB)^2}{3(2\cot gB + \cot gA)(2\cot gA + \cot gB)}$$

Đáp án

Ta có: $\dfrac{S_{OMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{ON}{OB}.\dfrac{OM}{OP}$ (1)



Kẽ PS // AB, ta có: $\dfrac{PM}{MA} = \dfrac{\cot gB}{2\cot gA}$

$$\Rightarrow \frac{PM}{AP} = \frac{\cot gB}{2\cot gA + \cot gB}$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{OP} = \frac{2\cot gA - 2\cot gB}{2\cot gA + \cot gB} \quad (2)$$

Bằng cách kẽ RT // QC, ta có $\dfrac{NO}{BO} = \dfrac{2\cot gA - 2\cot gB}{2(\cot gA + 2\cot gB)}$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) có đ.p.c.m

Câu 2: *(... điểm)*

Cho a; b; c là ba số thực dương thoả mãn: $abc + 6a + 3b + 2c = 24$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = abc(a^2 + 3)(b^2 + 12)(c^2 + 27)$

Đáp án

Chứng minh bất đẳng thức:

$$(a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3)^3 \le (a_1^3 + b_1^3)(a_2^3 + b_2^3)(a_3^3 + a_3^3)(1)$$

Đặt $x_1 = a_1^3$; $x_2 = a_2^3$; $x_3 = a_3^3$; $y_1 = b_1^3$; $y_2 = b_2^3$; $y_3 = b_3^3$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_1x_2x_3} + \sqrt[3]{y_1y_2y_3} \le \sqrt[3]{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3)}$$

Ta có $\sqrt[3]{\dfrac{x_1x_2x_3}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3)}} \le \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x_1}{x_1 + y_1} + \dfrac{x_2}{x_2 + y_2} + \dfrac{x_3}{x_3 + y_3}\right)$

Và $\sqrt[3]{\dfrac{y_1y_2y_3}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3)}} \le \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{y_1}{x_1 + y_1} + \dfrac{y_2}{x_2 + y_2} + \dfrac{y_3}{x_3 + y_3}\right)$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x_1x_2x_3}{(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3)}} + \sqrt[3]{\frac{y_1y_2y_3}{(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3)}} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x_1x_2x_3} + \sqrt[3]{y_1y_2y_3} \le \sqrt[3]{(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$.

* Ta có $(a-1)(b-2)(c-3) + (a+1)(b+2)(c+3)$

$$= 2(abc + 6a + 3b + 2c) = 48$$

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta được:

$$48^3 \le [(a-1)^3 + (a+1)^3][(b-2)^3 + (b+2)^3][(c-3)^3 + (c+3)^3]$$

$$\Leftrightarrow 48^3 \le 8abc(a^2+3)(b^2+12)(c^2+27)$$

$$\Leftrightarrow M \ge 24^3 = 13824.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a-1}{a+1} = \frac{b-2}{b+2} = \frac{c-3}{c+3} \\ abc + 6a + 3b + 2c = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$

$$\text{MinM} = 13824 \text{ khi } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Câu 3: *(... điểm)*

Cho hai đường tròn đồng tâm O bán kính r và R (với r < R). ΔABC nội tiếp đường tròn (O; r). Kéo dài các tia CA; AB; BC cắt đường tròn (O; R) tại B_1; C_1; A_1. Gọi $S_{\Delta A_1B_1C_1}$ và $S_{\Delta ABC}$ là diện tích các $\Delta A_1B_1C_1$ và ΔABC. Chứng minh $\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} \ge \left(\frac{R}{r}\right)^2$

Đáp án

Ta có $B_1A.B_1C = R^2 - r^2$; $C_1A.C_1B = R^2 - r^2$; $A_1B.A_1C = R^2 - r^2$

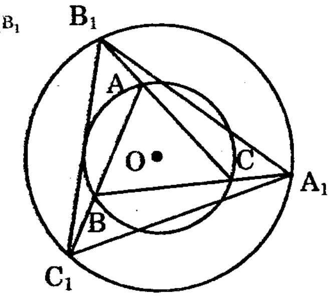
Và $\sin A \sin B \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8} \Rightarrow AB.AC.BC \le 3\sqrt{3}r^3$.

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta AB_1C_1} + S_{\Delta BA_1C_1} + S_{\Delta CA_1B_1}$$

Và $S_{\Delta AB_1C_1} = \frac{1}{2}AB_1.AC_1.\sin A$;

$S_{\Delta BA_1C_1} = \frac{1}{2}BA_1.BC_1.\sin B$;

$S_{\Delta CA_1B_1} = \frac{1}{2}CA_1.CB_1.\sin C$;



$$\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = 1 + \frac{S_{\Delta AB_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta BA_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta CA_1B_1}}{S_{\Delta ABC}}$$
$$= 1 + \frac{AB_1.AC_1}{AB.AC} + \frac{BA_1.BC_1}{BA.BC} + \frac{CA_1.CB_1}{CA.CB}$$
$$\geq 1 + 3\sqrt[3]{\frac{A_1B.A_1C.B_1A.B_1C.C_1A.C_1B}{(BC.CA.AB)^2}}$$
$$= 1 + \frac{R^2 - r^2}{r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ Δ ABC đều

Câu 4: ***(... điểm)***

Gọi x_1, x_2 là nghiệm phương trình $x^2 - 6x + 1 = 0$. Với mọi số **nguyên n, đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ chứng minh rằng** S_n là một số nguyên **không chia hết cho 5.**

Đáp án

+ **Hiển nhiên x_1, x_2 khác không và** $x_1 + x_2 = 6$, $x_1.x_2 = 1$.

Với n là số nguyên, ta có các trường hợp sau:

+ **n = 0. $S_0 = 2$ thuộc Z và không chia** hết 5.

+ **n > 0.**

$S_1 = 6$, $S_2 = x_1^2 + x_2^2 = 34$ là các số nguyên và không chia hết cho 5.

Giả sử $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{n-1} \in Z$ và không chia hết cho 5, với $n \geq 3$, ta **chứng minh S_n là số nguyên và không chia** hết cho 5. Ta có

$$S_n = x_1^n + x_2^n = x_1^n + x_2^n + x_2x_1^{n-1} + x_1x_2^{n-1} - x_2x_1^{n-1} - x_1x_2^{n-1}$$
$$= x_1(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) + x_2(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_2x_2(x_2^{n-2} + x_2x_2^{n-2})$$
$$= (x_1 + x_2)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_2x_2(x_2^{n-2} + x_2^{n-2})$$
$$= 6(x_1^{n-1} + x_2^{n-2}) - (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})$$

Suy ra: $S_n = 6S_{n-1} - S_{n-2} = 6(6S_{n-2} - S_{n-3}) - S_{n-2}$
$$= 35S_{n-2} - 6S_{n-3}.$$

Do S_{n-2}, S_{n-3} là số nguyên nên S_n là số nguyên. Hơn nữa do **S_{n-3} không chia hết cho 5, nên S_n** không chia hết cho 5.

+ **n < 0. Đặt n = – m với m > 0. Khi đó,** ta có

$$S_n = x_1^n + x_2^n = x_1^{-m} + x_2^{-m} = \frac{1}{x_1^m} + \frac{1}{x_2^m}$$
$$= \frac{x_1^m + x_2^m}{x_1^m x_2^m} = \frac{x_1^m + x_2^m}{(x_1x_2)m} = x_1^m + x_2^m$$

Với m nguyên dương, nên $x_1^m + x_2^m$ là số nguyên và không chia hết cho 5, hay S_n là số nguyên và không chia hết cho 5.

Vậy $S_n = x_1^n + x_2^n$ là một số nguyên không chia hết cho 5.

Câu 5: *(... điểm)*

Giải phương trình:

$$\left|\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2-4x+40}\right| = x^2+5x+\frac{45}{4}$$

Đáp án

Đặt $f(x) = \left|\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{x^2-4x+40}\right|$

$$= \left|\sqrt{(x+1)^2+4}-\sqrt{(2-x)^2+36}\right|$$

Xét các vectơ $\vec{u}(x+1, -2)$, $\vec{v}(2-x, 6)$ ta có: $\vec{u}+\vec{v} = (3, 4)$,

$$|\vec{u}| = \sqrt{(x+1)^2+4}, |\vec{v}| = \sqrt{(2-x)^2+36}$$

Khi đó $f(x) = \left||\vec{u}|-|\vec{v}|\right| \le |\vec{u}+\vec{v}| = 5$ (2)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ hoặc $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng.

Hai khả năng $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ không thể xảy ra, nên (3)

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2-x} = \frac{-2}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \quad (4)$$

Từ (1), (2) và (4) suy ra $x^2+5x+\frac{45}{4} \le 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ (5)

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -5/2$.

Câu 6: *(... điểm)*

Cho số nguyên dương a không chia hết cho 2. Tính số các số nguyên dương không lớn hơn $a(a+1)(a+2)$ mà không chia hết cho các số a, $a+1$, $a+2$.

Đáp án

Đặt $S = \{1, 2, 3, ..., a(a+1)(a+2)\}$, khi đó $|S| = a(a+1)(a+2)$.

Đặt $A_1 = \{k \in S \mid k \vdots a\}$, $A_2 = \{k \in S \mid k \vdots a+1\}$, $A_3 = \{k \in S \mid k \vdots a+2\}$

Gọi A là tập hợp các số nguyên dương cần tìm, ta có

$$S = A \cup (A_1 \cup A_2 \cup A_3).$$

Do $A \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \varnothing$, nên theo quy tắc ta có:

$|A| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$, hay

$$|A| = a(a+1)(a+2) - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|. \qquad (1)$$

Theo quy tắc bù–trừ ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2|$$

$$+ |A_2 \cap A_3| + |A_3 \cap A_1|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \qquad (2)$$

Ta có: $|A_1| = (a + 1)(a + 2)$; $|A_2| = a(a + 1)$; $|A_3| = a(a + 2)$

Suy ra $A_1 \cap A_2 = \{k \in S | k \vdots a, k \vdots (a + 1)\} = \{k \in S | k \vdots [a, a + 1]\}$,

Với $[a, a + 1]$ ký hiệu là BSCNN của a và a+1.

Suy ra $|A_1 \cap A_2| = a + 2$ Tương tự ta có $|A_2 \cap A_3| = a$.

Vì a lẻ nên a và a + 2 nguyên tố cùng nhau, tức là $(a, a + 2) = 1$; vì thế

$$K \in A_1 \cap A_2 \Leftrightarrow \{k \in S | k \vdots [a, a + 1]\} \Leftrightarrow \{k \in S | k \vdots a(a + 1)\}$$

Vì thế $|A_1 \cap A_3| = a + 1$.

Tương tự $k \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \Leftrightarrow \{k \in S | k \vdots a(a + 1)(a + 2)\}$.

Suy ra $|A_2 \cap A_2 \cap A_3| = 1$.

Như vậy từ (2) ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= (a + 1)(a + 2) + a(a + 1) + a(a + 2) - (a + 2 + a + a + 1) + 1$$

$$= 3a^2 + 3a.$$

Thay vào (1) ta được kết quả sau:

$$|A| = a^3 - a.$$

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT – QUẢNG NGÃI

Câu 1: *(4 điểm)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^2 + x + 1 = 2xy + y$$

Đáp án

Phương trình đã cho được viết dưới dạng:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4(2x+1)} \Leftrightarrow 4y = 2x + 1 + \frac{3}{2x+1}$$

Vì $x, y \in Z \Rightarrow 2x + 1$ là ước của $3 \Rightarrow 2x + 1 \in \{1; -1; 3; -3\}$

$\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình: $(0; 1), (-1; -1), (1; 1), (-2, -1)$

Câu 2: *(4 điểm)*

Giải hệ: $\begin{cases} \sqrt[3]{y^3 - 1} + \sqrt{x} = 3 \\ x^2 + y^3 = 82 \end{cases}$

Đáp án

Điều kiện: $x \geq 0$

Đặt $u = \sqrt{x}$, $u \geq 0$, $v = \sqrt[3]{y^3 - 1}$ $\Rightarrow \begin{cases} x = u^2 \\ y^3 - 1 = v^3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = u^4 \\ y^3 = v^3 + 1 \end{cases}$ thay vào hệ ta có:

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u^4 + v^3 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ u^4 + (3 - u)^3 = 81 \end{cases}$$

$\Rightarrow u^4 + 27 - 27u + 9u^2 - u^3 = 81$

$\Leftrightarrow u^4 - u^3 + 9u^2 - 27u - 54 = 0$

$\Leftrightarrow (u - 3)(u^3 + 2u^2 + 15u + 18) = 0$, vì $u \geq 0$ nên suy ra

$u - 3 = 0 \Leftrightarrow u = 3$

Vậy $\begin{cases} u = 3 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt[3]{y^3 - 1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 1 \end{cases}$

Câu 3: *(4 điểm)*

Chứng minh rằng, với mọi a, b thoả $a + b > 0$ và $a \neq b$, ta có:

$$2^{2007}(a^{2008} + b^{2008}) > (a + b)^{2008}$$

Đáp án

Bất đẳng thức tương đương với: $\dfrac{a^{2008} + b^{2008}}{2} > \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{2008}$

Xét bất đẳng thức tổng quát: $\dfrac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$ (*) $\forall n \geq 2$

Ta chứng minh (*) bằng quy nạp. Thật vậy:

Với $n = 2$, (*) đúng, dấu đẳng thức không thể xảy ra vì $a + b > 0$, $a \neq b$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ tức là: $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^k < \dfrac{a^k + b^k}{2}$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Tức là chứng minh:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$$

Thật vậy: $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+1} = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^k \left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leq \dfrac{a^k + b^k}{2} \cdot \dfrac{a+b}{2}$

Ta chỉ cần chứng minh: $\dfrac{a^k + b^k}{2} \cdot \dfrac{a+b}{2} \leq \dfrac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$

$$\Leftrightarrow (a^k + b^k)(a + b) \leq 2a^{k+1} + 2b^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow a^{k+1} - a^k b + b^{k+1} - b^k a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a^k - b^k) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Dấu đẳng thức không thể xảy ra vì $a + b > 0$, $a \neq 0$ (đpcm).

Câu 4: *(4 điểm)*

Trong một cuộc giao lưu giữa ba trường trung học phổ thông, trường A có 2007 học sinh, trường B có 2008 học sinh và trường C có 2009 học sinh, mỗi học sinh đều đội mũ có ghi tên của trường mình. Cuối buổi giao lưu, các học sinh bắt tay nhau để từ biệt. Nếu hai học sinh bắt tay nhau mà đội hai chiếc mũ khác nhau thì được ban tổ chức thay hai chiếc mũ ấy bởi hai chiếc mũ của trường thứ ba, nếu hai học sinh cùng đội một loại mũ mà bắt tay nhau thì không được ban tổ chức thay mũ. Một học sinh trường C nói rằng: "Có một chiến thuật để có thể có thời điểm tất cả các học sinh đều đội mũ của trường C". Nhận xét đó đúng hay sai? Hãy giải thích.

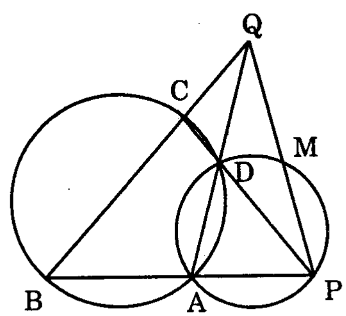
Đáp án

Ba số 2007, 2008, 2009 khi chia cho 3 có số dư lần lượt là 0, 1, 2. Nếu hai học sinh khác trường bắt tay nhau thì số mũ của hai trường ấy mỗi trường giảm đi 1 đơn vị, trường còn lại tăng thêm 2 đơn vị. Mà 3 số khi chia cho 3 có số dư lần lượt là 0, 1, 2, nếu giảm 2 số mỗi số một đơn vị và tăng số còn lại 2 đơn vị thì ta nhận được ba số mới. Các số này khi chia cho 3 có số dư khác nhau và nhận giá trị từ 0, 1, 2. Vậy nhận xét đó không đúng.

Câu 5: *(4 điểm)*

Hai cạnh đối diện của một tứ giác nội tiếp đường tròn cắt nhau tại P và Q. Hãy tìm độ dài đoạn thẳng PQ khi biết độ dài các tiếp tuyến kẻ từ các điểm P và Q tới đường tròn là a và b.

Đáp án



Cho đường thẳng PQ cắt đường tròn ngoại tiếp APD tại điểm M.

Ta có:

$$\widehat{DMQ} = \widehat{DAP} = \widehat{BCD} = 180^0 - \widehat{DCQ}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác CDMQ nội tiếp trong đường tròn

Từ tính chất tiếp tuyến của một điểm đối với đường tròn ta có:

$$\begin{cases} QM.QP = QD.QA = b^2 \\ PM.PQ = PD.PC = a^2 \end{cases} \Rightarrow PQ(QM + PM) = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow PQ^2 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow PQ = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUANG TRUNG – BÌNH PHƯỚC

Câu 1: *(4 điểm)*

Giải phương trình: $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} = 0$

Đáp án

+ Điều kiện $x \in R$

+ Đặt $t = \sqrt[3]{4x-4}$, $(t \in R)$

Ta có: $x = \dfrac{t^3+4}{4}$, phương trình trở thành: $t^6 - 14t^3 - 24t + 96 = 0$

$\Leftrightarrow (t-2)^2(t^4 + 4t^3 + 12t^2 + 18t + 24) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t^4 + 4t^3 + 12t^2 + 18t + 24 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ \left(t^2 + 2t\right)^2 + 2\left(2t + \dfrac{9}{4}\right)^2 + \dfrac{111}{8} = 0\ (VN) \end{array}\right.$$

Với $t = 2 \Rightarrow x = 3$.

+ Kết luận: Phương trình có nghiệm là $x = 3$.

Câu 2: *(4 điểm)*

Chứng tỏ rằng số $444444 + 303030\sqrt{3}$ không thể biểu diễn dưới dạng $(x + y\sqrt{3})^2$ với $x, y \in Z$.

Đáp án

Nếu $(A + B\sqrt{3})^2 = C + D\sqrt{3}$ thì $C = A^2 + 3B^2$, $D = 2AB$

$\Rightarrow (A - B\sqrt{3})^2 = C - D\sqrt{3}$

Do đó nếu $(x + y\sqrt{3})^2 = 444444 + 303030\sqrt{3}$

Thì ta cũng sẽ có $(x - y\sqrt{3})^2 = 444444 - 303030\sqrt{3}$ (vô lý)

Vì $444444 - 303030\sqrt{3} < 0$.

Câu 3: *(4 điểm)*

Cho các số x, y, z là các số thực dương có: $x + y + z = \dfrac{3}{2}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{4yz+1} + \dfrac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{4zx+1} + \dfrac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{4xy+1} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Đáp án

Từ: $\sqrt{x^2+xy+y^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$ và bất đẳng thức quen thuộc

$4xy \le (x+y)^2$

Ta được:

$$VT \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{x+y}{4yz+1}+\frac{y+z}{4zx+1}+\frac{z+x}{4xy+1}\right].$$

$$\ge \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{x+y}{(y+z)^2+1}+\frac{y+z}{(z+x)^2+1}+\frac{z+x}{(x+y)^2+1}\right]$$

Đặt $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$ ta có: $a + b + c = 3$, $a, b, c > 0$

$$VT \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\right)$$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} \ge \frac{3}{2}$

Thật vậy: Áp dụng bất đẳng thức Côsi

$$(a+b+c)-\left(\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\right)$$

$$=\left(a-\frac{a}{b^2+1}\right)+\left(b-\frac{b}{c^2+1}\right)+\left(c-\frac{c}{a^2+1}\right)$$

$$=\frac{ab^2}{b^2+1}+\frac{bc^2}{c^2+1}+\frac{ca^2}{a^2+1}$$

$$\le \frac{1}{2}(ab+cb+ca) \le \frac{1}{6}(a+b+c)^2 = \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Câu 4: *(4 điểm)*

Chứng minh rằng đa thức.

$$x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + x^{6666} + x^{5555} + x^{4444} + x^{3333} + x^{2222} + x^{1111} + 1$$

Chia hết cho đa thức: $x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Đáp án

Đặt hai đa thức đã cho lần lượt là A và B.

Ta có:

$$A - B = (x^{9999} - x^9) + (x^{8888} - x^8) + \ldots + (x^{1111} - x)$$

$$= x^9((x^{10})^{999} - 1) + x^8((x^{10})^{888} - 1) + ... + x((x^{10})^{111} - 1)$$

Suy ra A – B chia hết $x^{10} - 1$ và do đó A – B chia hết cho

$$B = \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$$

Vậy A chia hết cho B.

Câu 5: *(4 điểm)*

Trong mặt phẳng cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ. Đặt a = BC, b = AC, c = AB. Chứng minh rằng ta luôn có:

$$\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c} \geq \sqrt{3}.$$

Đáp án

+ Theo công thức độ dài đường trung tuyến ta có:

$$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 \Rightarrow 2(b^2 + c^2 + a^2) = 4m_a^2 + 3a^2$$

+ Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$4m_a^2 + 3a^2 \geq 4\sqrt{3}am_a \Rightarrow 2(b^2 + c^2 + a^2) \geq 4\sqrt{3}am_a$$

$$\Leftrightarrow a.m_a \leq \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2\sqrt{3}}$$

+ Mặt khác gọi G là trọng tâm của tam giác ABC khi đó:

$$\frac{MA}{a} = \frac{MA.GA}{a.GA} \geq \frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA}}{\frac{b^2 + c^2 + a^2}{2\sqrt{3}}.\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{b^2 + c^2 + a^2}\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right).\overrightarrow{GA} = \frac{3\sqrt{3}}{b^2 + c^2 + a^2}\left(\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2\right)$$

+ Lập luận tương tự cho $\frac{MB}{b}$ và $\frac{MC}{c}$ ta có:

$$\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c}$$

$$\geq \frac{3\sqrt{3}}{b^2 + c^2 + a^2}\left[\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2\right]$$

+ Mà G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ và } GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Do đó $\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{b^2 + c^2 + a^2}\left[0 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)\right] = \sqrt{3}$,

Bài toán được chứng minh.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRÀ VINH – TỈNH TRÀ VINH

Câu 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 30\sqrt{x_1} + 4\sqrt{x_2} = \sqrt[2009]{x_3^{2008}} \\ 30\sqrt{x_2} + 4\sqrt{x_3} = \sqrt[2009]{x_4^{2008}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 30\sqrt{x_{2008}} + 4\sqrt{x_1} = \sqrt[2009]{x_2^{2008}} \\ x_1 > 0; x_2 > 0; \dots; x_{2008} > 0 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Đáp án

Giả sử $(x_1, x_2, \dots, x_{2008})$ là 1 nghiệm của hệ (I).

Đặt: $a = \text{Max}\{x_1, x_2, \dots, x_{2008}\}$

$b = \text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_{2008}\}$

$\Rightarrow a \geq b > 0$ (*)

Ta có:

$$\begin{cases} 34\sqrt{a} \geq 30\sqrt{x_1} + 4\sqrt{x_2} = \sqrt[2009]{x_3^{2008}} \\ 34\sqrt{a} \geq 30\sqrt{x_2} + 4\sqrt{x_3} = \sqrt[2009]{x_4^{2008}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 34\sqrt{a} \geq 30\sqrt{x_{2008}} + 4\sqrt{x_1} = \sqrt[2009]{x_2^{2008}} \end{cases}$$

$$34\sqrt{a} \geq \text{Max}\{\sqrt[2009]{x_1^{2008}}; \dots; \sqrt[2009]{x_{2008}^{2008}}\}$$

$$\Rightarrow 34\sqrt{a} \geq \sqrt[2009]{a^{2008}}$$

$$\Rightarrow 34^{4018} a^{2009} \geq a^{4016}$$

$$\Leftrightarrow a^{2007} \leq 34^{4018} \Leftrightarrow a \leq \sqrt[2007]{34^{4018}} \quad (1)$$

Tương tự

$$\begin{cases} 34b \leq 30\sqrt{x_1} + 4\sqrt{x_2} = \sqrt[2009]{x_3^{2008}} \\ 34b \leq 30\sqrt{x_2} + 4\sqrt{x_3} = \sqrt[2009]{x_4^{2008}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 34b \leq 30\sqrt{x_{2008}} + 4\sqrt{x_1} = \sqrt[2009]{x_2^{2008}} \end{cases}$$

$$34b \le \mathrm{Min}\{\sqrt[2009]{x_1^{2008}};\ldots;\sqrt[2009]{x_{2008}^{2008}}\}$$

$$\Rightarrow 34b \le \sqrt[2009]{b^{2008}}$$

$$\Rightarrow b \ge \sqrt[2007]{34^{4018}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) và (*) suy ra:

$$a = b = \sqrt[2007]{34^{4018}}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_{2008} = \sqrt[2007]{34^{4018}}$$

Thử lại ta thấy nghiệm trên thoả (I).

Vậy hệ (I) có 1 nghiệm dương $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2008} = \sqrt[2007]{34^{4018}}$

Câu 2:

Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x;y) của phương trình:

$$30^x + 4^x + [A]^x = y^{2008} \quad (*)$$

Trong đó kí hiệu [A] để chỉ phần nguyên của số thực A với

$$A = \sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \ldots + \sqrt[2009]{\frac{2009}{2008}}$$

Đáp án

Ta tìm phần nguyên của số:

$$S_n = \sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \cdots + \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}$$

Ta có $S_n > n$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho (k + 1) số gồm k số 1 và $(1 + \frac{1}{k})$

$$1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots + (1 + \frac{1}{k}) > (k+1)\sqrt[k+1]{1 + \frac{1}{k}}$$

(Dấu "=" không xảy ra vì $1 + \frac{1}{k} > 1$)

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1) + \frac{1}{k}}{k+1} > \sqrt[k+1]{1 + \frac{1}{k}} \Leftrightarrow \sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}} < 1 + \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}} < 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad (1)$$

Áp dụng (1) với k = 1, 2, 3, ..., n

$$\sqrt{\frac{2}{1}} < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} < 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

....

$$\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}} < 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta được: $S_n < n + 1 - \dfrac{1}{n+1} < n + 1$

Vậy $\quad n < S_n < n + 1 \Rightarrow [S_n] = n$

Do đó: $[A] = [S_{2008}] = 2008$

$(*) \Leftrightarrow 30^x + 4^x + 2008^x = y^{2008} \quad$ (I)

Ta có:

Suy ra $\begin{cases} 30^x \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \\ 4^x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \\ 2008^x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \end{cases} \quad 30^x + 4^x + 2008^x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$

* Nếu $y = 3k$ thì $y^{2008} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 3) \Rightarrow$ (I) không có nghiệm nguyên dương

* Nếu $y = 3k + 1$ ($k \in N^{*}$) thì $y^{2008} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \Rightarrow$ (I) vô nghiệm.

* Nếu $y = 3k + 2$ ($k \in N^{*}$) thì $\Rightarrow y^{2008} \equiv 2^{2008} \equiv (3 - 1)^{2008} \equiv (-1)^{2008}$ (mod 3) (I) vô nghiệm.

Vậy: Phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Câu 3:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có 2 phân giác trong BE, CF. Tia EF cắt (O) tại M, Tia FE cắt (O) tại N. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{BM} + \frac{1}{CN} \geq \frac{4}{AM + AN} + \frac{4}{BN + CM}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

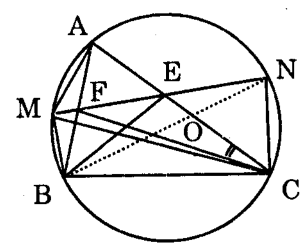
Đáp án

Đặt BC = a, AC = b, AB = c.

Áp dụng định lí Ptolémée cho tứ giác AMBC và ANCB ta có:

$$\begin{cases} BC.AM + AC.BM = AB.CM \\ BC.AN + AB.CN = AC.BN \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} aAM + bBM = cCM \\ aAN + cCN = bBN \end{cases}$$



$$\Rightarrow a(AM + AN) = b(BN - BM) + c(CM - CN)$$

$$\Rightarrow AM + AN = \frac{b}{a}(BN - BM) + \frac{c}{a}(CM - CN) \quad (1)$$

Mặt khác

$$\Delta AFM \sim \Delta NFB \ (g - g) \Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{MF}{BF} \quad (2)$$

$$\Delta AFN \sim \Delta MFB \Rightarrow \frac{AN}{BM} = \frac{AF}{MF} \quad (3)$$

Nhân (2) với (3): $\frac{AM.AN}{BM.BN} = \frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$ (do CF là phân giác)

Vậy $\quad \frac{AM.AN}{BM.BN} = \frac{b}{a} \quad (4)$

Tương tự $\quad \frac{AM.AN}{CM.CN} = \frac{c}{a} \quad (5)$

Thế (4); (5) vào (1):

$$AM + AN = \frac{AM.AN}{BM.BN}(BN - BM) + \frac{AM.AN}{CM.CN}(CM - CN)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{BM} - \frac{1}{BN} + \frac{1}{CN} - \frac{1}{CM}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{BM} + \frac{1}{CN} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CM} \quad (6)$$

Theo bất đẳng thức Côsi: $(x + y)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi x = y.

$$\Rightarrow \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} \geq \frac{4}{AM + AN} \quad (7)$$

và $\quad \frac{1}{BN} + \frac{1}{CM} \geq \frac{4}{BN + CM} \quad (8)$

Từ (6), (7), (8) suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} AM = AN \\ BN = CM \end{cases}$

Khi đó: $\begin{cases} \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN} \\ \overset{\frown}{BN} = \overset{\frown}{CM} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ABN} = \widehat{ACM} \\ \widehat{BAN} = \widehat{CAM} \end{cases}$

$$\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{AMC} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow AB = AC$$

$\Rightarrow$ Tam giác ABC cân tại A.

Câu 4:

Cho tam giác ABC. Gọi O là điểm trong tam giác sao cho $\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$ (với A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của O lên BC, AC, AB).

Chứng minh rằng: $\frac{r}{3} \le \frac{\sum_{i=1}^{3} OA_i^3}{(\sum_{i=1}^{3} OA_i)^2}$ (r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC).

Đáp án

Gọi BC = a, AC = b, AB = c, $OA_1 = x$, $OA_2 = y$, $OA_3 = z$.

Gọi $\vec{n_1}, \vec{n_2}, \vec{n_3}$ lần lượt vuông góc với BC, AC, AB hướng ra ngoài tam giác và có độ dài bằng độ dài cạnh tương ứng.

Khi đó: tồn tại phép quay Q với góc quay 90^0 biến

$$\overrightarrow{BC} \to \vec{n_1}, \overrightarrow{CA} \to \vec{n_2}, \overrightarrow{AB} \to \vec{n_3}$$

$$\Rightarrow Q: \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \to \vec{n_1} + \vec{n_2} + \vec{n_3}$$

$$\Rightarrow \vec{n_1} + \vec{n_2} + \vec{n_3} = \vec{0}$$

Khi đó: $\overrightarrow{OA_1} = \frac{x}{a}\vec{n_1}, \overrightarrow{OA_2} = \frac{y}{b}\vec{n_2}, \overrightarrow{OA_3} = \frac{z}{c}\vec{n_3}$

Có $\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{OA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{x}{a}\vec{n_1} + \frac{y}{b}\vec{n_2} + \frac{z}{c}\vec{n_3} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\vec{n_1} + \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\vec{n_2} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz} = \sqrt{\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{(a+b+c)(ax+by+cz)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+z}{2p} = \sqrt{\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{2p.2S}}$$

Không mất tính tổng quát giả sử: $x \le y \le z \Rightarrow x^2 \le y^2 \le z^2$

$$\Rightarrow (x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \le 3(x^3+y^3+z^3) \text{ (BĐT Trêbưsep)}$$

Vậy $\frac{x+y+z}{2p} = \sqrt{\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{2p.2S}} \le \sqrt{\frac{3(x^3+y^3+z^3)}{4pS}}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y+z)^2}{4p^2} \le \frac{3(x^3+y^3+z^3)}{4p.pS}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{3} \le \frac{x^3+y^3+z^3}{(x+y+z)^2}$$

Vậy $\frac{r}{3} \le \frac{\sum_{i=1}^{3} OA_i^3}{(\sum_{i=1}^{3} OA_i)^2}$ (đpcm).

Câu 5: Biết rằng phương trình: $x^4 - 2x^2 - 3x - 1 = 0$ (1) có nghiệm dương x_0.

Chứng minh rằng: $\sqrt[9]{162} < x_0 < 2$.

Chứng minh rằng nghiệm x_0 trên không là nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x} + x\sqrt{x-1} = 4$.

Đáp án

Với x_0 là nghiệm dương của phương trình (1), khi đó:

$$x_0^4 - 2x_0^2 - 3x_0 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0^4 = 2{x_0}^2 + 3x_0 + 1$$

$$\Leftrightarrow x_0^4 \ge 3\sqrt[3]{6x_0^3} \text{ (BĐT Côsi)}$$

$$\Leftrightarrow x_0^3 \ge 3\sqrt[3]{6}$$

$$\Leftrightarrow x_0 \ge \sqrt[9]{162}$$

Mặt khác xét hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 3x - 1$

Với mọi $x_1, x_2 \in (2; +\infty)$:

$$x_1 \ne x_2 \text{ có } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 3 > 0$$

$\Rightarrow$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

$\Rightarrow \forall x > 2 \Leftrightarrow f(x) > f(2) = 1$

$\Rightarrow$ phương trình (1) không có nghiệm lớn hơn 2.

Dễ thấy $x_0 \ne 2$.

Vậy $x_0 < 2$.

Vậy phương trình $x^4 - 2x^2 - 3x - 1 = 0$ có nghiệm x_0 thoả

$$\sqrt[9]{162} < x_0 < 2.$$

Xét phương trình $\sqrt{3-x}+x\sqrt{x-1}=4$ (2)

Điều kiện: $1 \le x \le 3$.

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 16 \le (1+x^2)(3-x+x-1) \text{ (Bunhiacopski)}$$

$$\Leftrightarrow 7 \le x^2 \Leftrightarrow x \ge \sqrt{7} > 2$$

Vậy nghiệm x_0 của phương trình (1) thoả $\sqrt[9]{162} < x_0 < 2$ và không là nghiệm phương trình

$$\sqrt{3-x}+x\sqrt{x-1}=4.$$

Bài 6: Cho 3 số thực dương thay đổi x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$24\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right) \le 1+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \quad (*)$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{30x+4y+2008z}+\frac{1}{30y+4z+2008x}+\frac{1}{30z+4x+2008y}$$

Đáp án

Ta có $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \ge \frac{1}{3x}-\frac{1}{36}$ (1)

Dấu "=" xảy ra khi x = 6.

Tương tự:

$$\frac{1}{y^2} \ge \frac{1}{3y}-\frac{1}{36} \quad \text{(2) Dấu "=" xảy ra khi } y = 6$$

$$\frac{1}{z^2} \ge \frac{1}{3z}-\frac{1}{36} \quad \text{(3) Dấu "=" xảy ra khi } z = 6$$

Cộng (1), (2) và (3): $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \ge \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{12}$

$$\Rightarrow 24\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right) \ge 8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-2 \quad (4)$$

Từ (*) và (4) suy ra:

$$8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-2 \le 1+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \le \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2042 số dương:

$$30x + 4y + 2008z \geq 2042\sqrt[2042]{x^{30}y^4z^{2008}} \quad (5)$$

$$\frac{30}{x} + \frac{4}{y} + \frac{2008}{z} \geq 2042\sqrt[2042]{\frac{1}{x^{30}}\frac{1}{y^4}\frac{1}{z^{2008}}} \quad (6)$$

Nhân (5) và (6)

$$\left(\frac{30}{x} + \frac{4}{y} + \frac{2008}{z}\right)(30x + 4y + 2008z) \geq 2042^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{30x + 4y + 2008z} \leq \frac{1}{2042^2}\left(\frac{30}{x} + \frac{4}{y} + \frac{2008}{z}\right) \quad (7)$$

Tương tự

$$\frac{1}{30y + 4z + 2008x} \leq \frac{1}{2042^2}\left(\frac{30}{y} + \frac{4}{z} + \frac{2008}{x}\right) \quad (8)$$

$$\frac{1}{30z + 4x + 2008y} \leq \frac{1}{2042^2}\left(\frac{30}{z} + \frac{4}{x} + \frac{2008}{y}\right) \quad (9)$$

Từ (7), (8) và (9)

$$P \leq \frac{1}{2042}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{4084}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 6$.

Vậy MaxP $= \dfrac{1}{4084}$ khi $x = y = z = 6$.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG – TỈNH GIA LAI

Câu 1: Tìm tất cả các đa thức có hệ số thực sao cho

$$P(2) = 12 \text{ và } P(x^2) = x^2(x^2 + 1)P(x) \text{ với mọi } x \in R.$$

Đáp án

Cho $x = 0$ được $P(0) = 0$; cho $x = 1$ được $P(1) = 2P(1) \Rightarrow P(1) = 0$.

Từ đó $P(-1) = 0$.

Giả sử $P(x)$ có nghiệm thực t khác 0 và ± 1.

Ta có $P(t^2) = t^2(t^2 + 1)P(t) = 0$, suy ra t^2 cũng là nghiệm. Điều này dẫn đến $P(x)$ có vô số nghiệm thực. Vô lí. Vậy $P(x)$ chỉ có ba nghiệm là 0 và ± 1.

Gọi n là bậc của $P(x)$. Khi đó $P(x^2)$ có bậc 2n và $x^2(x^2 + 1)P(x)$ có bậc là $n + 4$.

Từ đó $2n = n + 4 \Rightarrow n = 4$.

Như thế đa thức $P(x)$ có một trong các dạng sau:

$$P(x) = a(x - 1)^2x(x + 1) \text{ hoặc } P(x) = a(x - 1)x^2(x + 1)$$

hoặc $P(x) = a(x - 1)x(x + 1)^2$.

Thay $x = 2$ có $12 = P(2) = 6a$ hoặc $12a$ hoặc $18a$. Từ đó $a \in \{2, 1, 2/3\}$.

Thử lại ta thấy $P(x) = (x-1)x^2(x + 1)$ thỏa mãn.

Vậy $P(x) = (x - 1)x^2(x + 1)$.

Câu 2:

Tìm tất cả số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình

$$9(x^2 + y^2 + 2) + 2(3xy - 1) = 2008$$

Đáp án

Ta đặt $s = x + y$ và $xy = p$, p và s thuộc N^*. Lúc đó phương trình trở thành

$$3s^2 = 4p + 664 \quad (1)$$

Ta thấy s^2 phải là số chẵn

- Nếu $p = 1$ thì $s^2 \notin N^*$ (mâu thuẫn)
- Vì vậy $p \geq 2$ và $3s^2 \geq 672 \Rightarrow s^2 \geq 224 \quad (2)$
- Mặt khác từ điều kiện $s^2 \geq 4p$, ta có $3s^2 - 664 \leq s^2$. Vì vậy

$$s^2 \leq 332 \quad (3)$$

Từ (2), (3) ta có $s^2 \in \{256; 324\}$

a) $s^2 = 256$ thì $s = 16$ và $p = 26 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}^*$.

b) $s^2 = 324$ thì $s = 18$ và $p = 77$ và $(x, y) = (11, 7); (7, 11)$

Đáp số $(x, y) = (11, 7); (7, 11)$

Câu 3:

Gọi ABCD là một tứ giác lồi với AB = BC = CD, AC ≠ BD và E là giao điểm của hai đường chéo của nó. Chứng minh rằng AE = DE khi và chỉ khi $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = 120^0$

Đáp án

Trước hết ta đặt $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \alpha$, $\widehat{CBD} = \widehat{CBD} = \beta$

TH 1: Giả sử AE = DE

Xét tam giác EBC, ta có $\widehat{AEB} = \widehat{DEC} = \alpha + \beta$ nên trong tam giác ABE cho $\widehat{ABE} = 180^0 - (2\alpha + \beta)$ và tam giác CED ta có $\widehat{DCE} = 180^0 - (\alpha + 2\beta)$. Áp dụng định lý sin trong hai tam giác này:

$$\frac{AE}{\sin(2\alpha+\beta)} = \frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{CD}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{DE}{\sin(\alpha+2\beta)}$$

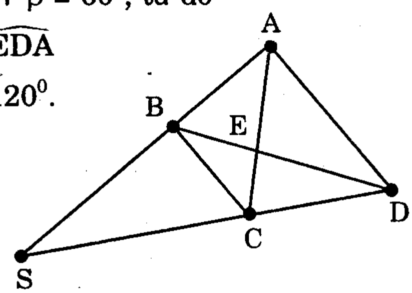
Vì vậy $\sin(2\alpha + \beta) = \sin(\alpha + 2\beta)$.

Xảy ra hai trường hợp:

a) $2\alpha + \beta = \alpha + 2\beta$ hay là $\alpha = \beta$ điều này sẽ cho $\Delta BAD = \Delta CDA$, từ đó AC = BD, mâu thuẫn.

b) $2\alpha + \beta + \alpha + 2\beta = 180^0$ hay là $\alpha + \beta = 60^0$, từ đó

$$\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = \alpha + \widehat{EAD} + \beta + \widehat{EDA}$$
$$= \alpha + \beta + \widehat{EAB} = 120^0.$$



TH 2: Giả sử $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = 120^0$.

Gọi S là giao điểm của đường thẳng AB và DC

Như chú ý trong TH1 có $\widehat{AEB} = \alpha + \beta$, nhưng $\widehat{AEB} = \widehat{EDA} + \widehat{EAD}$

Vì vậy: $2\widehat{AEB} = \alpha + \beta + \widehat{EDA} + \widehat{EAD} = \widehat{BAD} + \widehat{ADC} = 120^0$

Tức là: $\widehat{AEB} = 60^0$ nhưng $\hat{S} = 60^0$ vì vậy tứ giác SBEC nội tiếp

Do đó: $\widehat{BSE} = \widehat{BCA} = \alpha = \widehat{SAC}$. Vì vậy EA = ES (1)

Tương tự: ED = ES (2)

Từ (1) và (2) suy ra AE = DE (đpcm)

Câu 4:

Đặt $x_0 = 0$ và $x_i > 0$ với $i = \overline{1,n}$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_0 + \ldots + x_{i-1}}.\sqrt{x_i + \ldots + x_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

Đáp án

Đặt $x_0 = 0 = \sin 0 = a_0$

$x_0 + x_1 = \sin a_1$; $x_0 + x_1 + x_2 = \sin a_2$; $x_0 + x_1 + \ldots + x_i = \sin a_i$; ...;

$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = \sin a_n$ (hay $a_n = \pi/2$)

Với $a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_n = \pi/2$

Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin a_k - \sin a_{k-1}}{\sqrt{1 + \sin a_{k-1}}.\sqrt{1 - \sin a_{k-1}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\cos\frac{a_k + a_{k-1}}{2}\sin\frac{a_k - a_{k-1}}{2}}{\cos a_{k-1}}$$

Áp dụng tính chất quen thuộc: $x \in (0; \pi/2]$ ta có hàm số $y = \cos x$ giảm và $\sin x < x$. Vì vậy:

$$VT < \sum_{k=1}^{n} \frac{2\cos a_{k-1}.\frac{(a_k - a_{k-1})}{2}}{\cos a_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \frac{\pi}{2} \text{ (đpcm)}$$

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT – KIÊN GIANG

Câu 1: *(3 điểm)*

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{2008}{x_2}\right) & (1) \\ x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_3 + \dfrac{2008}{x_3}\right) & (2) \\ \ldots & \\ x_{2008} = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{2008}{x_1}\right) & (2008) \end{cases}$$

Đáp án

Do sự biểu diễn của các ẩn là tương tự nhau nên ta có thể giả sử $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_{2008}$

Ta có $x_ix_{i+1} = \dfrac{1}{2}(x_{i+1}^2 + 2008) > 0$, $\forall i = 1, \ldots, 2007$ nên ta luôn có các x_i cùng dấu với mọi $i = 1, \ldots, 2008$

Mặt khác, $x_{i+1} + \dfrac{2008}{x_{i+1}} \geq 2.\sqrt{2008} \Rightarrow |\bar{x}_i| \geq \sqrt{2008}, \quad \forall i (1)$

Trừ từng vế lần lượt phương trình (1) – (2), ..., ta được:

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_3)\left(1 - \frac{2008}{x_2x_3}\right)$$

$$x_2 - x_3 = \frac{1}{2}(x_3 - x_4)\left(1 - \frac{2008}{x_3x_4}\right)$$

...

$$x_{2008} - x_1 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)\left(1 - \frac{2008}{x_1x_2}\right)$$

Vì $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_{2008}$ nên $1 - \dfrac{2008}{x_2x_3} \geq 0$, $1 - \dfrac{2008}{x_3x_4} \geq 0$,

$\ldots, 1 - \dfrac{2008}{x_{2007}x_{2008}} \geq 0$ và $1 - \dfrac{2008}{x_1x_2} \leq 0$

Suy ra $\begin{cases} x_2x_3 \geq 2008 \\ \dots \\ x_{2007}x_{2008} \geq 2008 \\ x_1x_2 \leq 2008 \end{cases}$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta được $x_1 = x_2 = \dots = x_{2008} = \sqrt{2008}$.

Câu 2: *(4 điểm)* Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

$$\left(x^2 - y\right)\left(y^2 - x\right) = (x - y)^3 z.$$

Đáp án

Ta có: $\left(x^2 - y\right)\left(y^2 - x\right) = (x - y)^3$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 - y^3 - x^3 + xy = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - x^2y^2 - xy - 3x^2y + 3xy^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(2x^2 + \left(-y^2 - 3y\right)x - y + 3y^2\right) = 0$$

Nếu x = 0 thì y bất kì thuộc $\mathbb{Z}$.

Nếu $x \neq 0$ suy ra

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (-y^2 - 3y)x - y + 3y^2 = 0$$

Coi đây là phương trình ẩn x, ta có:

$$\Delta = (y^2 + 3y)^2 - 8(3y^2 - y) = (y - 1)^2 y(y + 8)$$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì trước hết Δ phải là số chính phương tức là

$$y(y + 8) = a^2 \Leftrightarrow (y + 4)^2 - a^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (y + 4 + a)(y + 4 - a) = 16 \ (a \in N)$$

Vì $y + 4 + a \geq y + 4 - a$ và $(y + 4 + a) + (y + 4 - a)$ là chẵn, $y + 4 + a$, $y + 4 - a$ chẵn ta có bảng:

$y + 4 + a$	8	4	−4	−2
$y + 4 - a$	2	4	−4	−8
$2y + 8$	10	8	−8	−10
y	1	0	−8	−9
x	1	0 Loại	10	6 21

Từ bảng trên ta thấy tất cả các nghiệm nguyên của pt đã cho là:

(1, 1), (10, −8), (6, −9), (21, −9) và (0, k) với $k \in Z$

Câu 3: *(3 điểm)*

Cho $A_1, A_2, ..., A_{2008}$ là 2008 điểm tùy ý trên mặt phẳng. Chứng minh rằng trên một đường tròn bất kì bán kính bằng 1 luôn tìm được một điểm M sao cho:

$$\sum_{i=1}^{2008} MA_i \geq 2008.$$

Đáp án

Giả sử M_1M_2 là một đường kính của đường tròn bán kính bằng 1. Ta có

$$M_1A_i + M_2A_i \geq M_1M_2 = 2, i = 1, 2, ..., 2008.$$

Cho i chạy từ 1 đến 2008, lấy tổng ta được:

$\sum_{i=1}^{2008} M_1A_i + \sum_{i=1}^{2008} M_2A_i \geq 2008.2$. Từ đây suy ra $\sum_{i=1}^{2008} M_1A_i \geq 2008$ hoặc $\sum_{i=1}^{2008} M_2A_i \geq 2008$. Đó chính là điều phải chứng minh

Câu 4: *(4 điểm)*

Cho hai số a, b không âm thoả: $a + b = 1$. Chứng minh rằng với mọi m, n nguyên dương ta có: $(1 - a^n)^m + (1 - b^m)^n \geq 1$

Đáp án

Từ giả thiết suy ra: $0 \leq a \leq 1$; $0 \leq b \leq 1$ và $a = 1 - b$; $b = 1 - a$

Ta có: $1 - (1 - a^n)^m = [1 - (1 - a^n)][1 + (1 - a^n) + (1 - a^n)^2 +$
$+ ... + (1 - a^n)^{m-1}] = a^n [1 + (1 - a)(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1}) +$
$+ (1 - a)^2(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1})^2 + ...$
$+ (1 - a)^{m-1}(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1})^{m-1}]$
$= a^n [1 + b(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1}) + b^2(1 + a + a^2 +$
$+ ... + a^{n-1})^2 + ... + b^{m-1}(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1})^{m-1}$
$\leq a^n(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1})^{m-1}(1 + b + b^2 + ... + b^{m-1})$ (1)

Tương tự ta có:

$1 - (1 - b^m)^n \leq b^m(1 + b + b^2 + ... + b^{m-1})^{n-1}(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1})$ (2)

Nhân theo vế (1) và (2) ta có:

$[1 - (1 - a^n)^m][1 - (1 - b^m)^n]$
$\leq a^nb^m(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1})^m(1 + b + b^2 + ... + b^{m-1})^n$
$\Leftrightarrow 1 - (1 - a^n)^m - (1 - b^m)^n + (1 - a^n)^m(1 - b^m)^n$
$\leq [a(1 + b + b^2 + ... + b^{m-1})]^n [b(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1})]^m$
$= [(1 - b)(1 + b + b^2 + ... + b^{m-1})]^n[(1 - a)(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1})]^m$
$= (1 - b^m)^n (1 - a^n)^m$

Câu 5: *(3 điểm)*

Chứng minh rằng có vô số số chia hết cho $29^{4^{2008}}$ mà trong cách viết thập phân của số đó không chứa các chữ số 3, 0, 4, 8.

Đáp án

Gọi $a \in N$ mà trong cách viết thập phân của a không chứa các chữ số 3, 0, 4, 8. Ta có vô số số a như vậy.

Xét $29^{4^{2008}}$ số có dạng $\overline{a}$, $\overline{aa}$, $\overline{aaa}$, ..., $\overline{aa...a}$ giả sử đều không chia hết cho $29^{4^{2008}}$ khi đó có hai số chia cho $29^{4^{2008}}$ cùng số dư và hiệu của hai số đó chia hết cho $29^{4^{2008}}$. Hiệu có dạng $\overline{aa...a}.10^k \vdots 29^{4^{2008}}$ $\Rightarrow 10^k \vdots 29^{4^{2008}}$ vô lí.

Vậy trong $29^{4^{2008}}$ số trên phải có số chia hết cho $29^{4^{2008}}$ **(đpcm)**

Câu 6: *(3 điểm)*

Cho parabol: $y = -x^2$ (P) và đường thẳng $y = -mx - 1$ (d)

Chứng minh rằng khi m thay đổi đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại 2 điểm phân biệt M và N. Hãy tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOMN khi m thay đổi (O là gốc tọa độ).

Đáp án

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 - mx - 1 = 0$$

Có $\Delta = m^2 + 4 > 0;\ \forall m$

Vậy (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt M và N ở đó:

$$M(x_1, mx_1 + 1);\ N(x_2, mx_2 + 1) \text{ với } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -1 \end{cases}$$

Gọi I là trung điểm của MN thì $I\left(\dfrac{m}{2}, \dfrac{m^2+2}{2}\right)$

Mặt khác ta lại có: $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = x_1.x_2 + m^2x_1x_2 + m(x_1 + x_2) + 1$

$$= -1 + m^2.(-1) + m.m + 1 = 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$ hay tam giác OMN vuông tại O Hay I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta OMN \Rightarrow I\begin{cases} x = \dfrac{m}{2} \\ y = \dfrac{m^2+2}{2} \end{cases}$ khử m từ hai phương trình ta đi đến quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOMN là Parabol $y = 2x^2 + 1$.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN LỚP 10

TRƯỜNG THPT HUỲNH THÚC KHÁNG – QUẢNG NAM

Câu 1: *(3 điểm)*

Giải bất phương trình $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > \dfrac{35}{12}$

Đáp án

+ Điều kiện: $|x| > 1$. Nếu $x < -1$ thì $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} < 0$

$\Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm

+ Bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + \dfrac{x^2}{x^2-1} + \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1225}{144} > 0 \end{cases}$ *1đ*

Biến đổi $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 & (1) \\ \dfrac{x^4}{x^2-1} + 2.\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1225}{144} > 0 & (2) \end{cases}$

Đặt $t = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} > 0$.

Khi đó (2) có dạng $t^2 + 2t - \dfrac{1225}{144} > 0 \Rightarrow t > \dfrac{25}{12}$ *1đ*

Vậy từ (1), (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} > \dfrac{25}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{x^4}{x^2-1} > \dfrac{625}{144} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 144x^4 - 625x^2 + 625 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 < \dfrac{25}{9} \quad \text{hay} \quad x^2 < \dfrac{25}{16} \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{3} \text{ hay } 1 < x < \dfrac{5}{4}$$

Đây là nghiệm của bất phương trình. *1đ*

Câu 2: *(4 điểm)*

a) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $y = \dfrac{2x^2+1}{2x-1}$ nhận giá trị là một số nguyên

b) Tìm các số nguyên x, y, z thoả mãn đồng thời các đẳng thức

$$\begin{cases} x - y + z = 2 & (1) \\ 2x^2 - xy + x - 2z = 1 & (2) \end{cases}$$

Đáp án

a) $y = \dfrac{2x^2+1}{2x-1} = \dfrac{2x^2 - x + x + 1}{2x-1} = x + \dfrac{x+1}{2x-1}$

$= x + \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{3}{2x-1}\right)$ *1đ*

Suy ra nếu x, y nguyên thì 2x, 2y cũng nguyên

Khi đó $2y = 2x + 1 + \dfrac{3}{2x-1}$ nên $\dfrac{3}{2x-1}$ là số nguyên lẻ

Từ đó $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1 = \pm 1 \\ 2x-1 = \pm 3 \end{array}\right. \Rightarrow x \in \{0;\ 1; -1;\ 2\}$ *1đ*

b) Từ (1) ta có z = 2 + y – x thế vào (2) ta được

$2x^2 - xy + x - 4 - 2y + 2x = 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 = y(x + 2)$

Do x = –2 không thoả mãn phương trình trên

$y = \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x+2} = 2x - 1 - \dfrac{3}{x+2}$ *1đ*

y nguyên $\Leftrightarrow$ x + 2 là ước của 3. Suy ra:

$\left[\begin{array}{l} x+2 = \pm 1 \\ x+2 = \pm 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{-1; -3;\ 1; -5\}$

Từ đó suy ra nghiệm nguyên của hệ là:

$\begin{cases} x = 1 \\ y = -6 \\ z = -3 \end{cases};\ \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \\ y = 1 \end{cases};\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases};\ \begin{cases} x = -5 \\ y = -10 \\ z = -3 \end{cases}$ *1đ*

Câu 3: *(3 điểm)*

Chứng minh rằng nếu các góc của ΔABC thoả điều kiện $2A + 3B = \pi$ thì các cạnh của nó thoả mãn $a + b < \dfrac{5}{4}c$.

Đáp án

Do $\quad 2A+3B=\pi \Rightarrow A=\frac{\pi}{2}-\frac{3B}{2}$ mà $A+B+C=\pi$

$$\Rightarrow C=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3B}{2}\right)-A=\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}$$

Do đó $\sin A=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3B}{2}\right)=\cos\frac{3B}{2}=\cos\frac{B}{2}\left(4\cos^2\frac{B}{2}-3\right)$

(Theo công thức $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ với $x=\frac{B}{2}$)

và $\sin B=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$; $\sin C=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{B}{2}$ *1đ*

Theo định lý hàm số sin ta có:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\cos\frac{B}{2}\left(4\cos^2\frac{B}{2}-3\right)}=\frac{b}{2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4\cos^2\frac{B}{2}-3}=\frac{b}{2\sin\frac{B}{2}}=c$$

Theo tính chất tỉ lệ thức ta có

$$c=\frac{a+b}{4\cos^2\frac{B}{2}-3+2\sin\frac{B}{2}}=\frac{a+b}{4\left(1-\sin^2\frac{B}{2}\right)-3+2\sin\frac{B}{2}}$$

$$\Rightarrow a+b=c\left(-4\sin^2\frac{B}{2}+2\sin\frac{B}{2}+1\right)$$ *1đ*

Vì $2A+3B=\pi$ ta có $\frac{B}{2}=\frac{\pi}{6}-\frac{A}{3}\Rightarrow 0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{6}\Rightarrow 0<\sin\frac{B}{2}<\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 1<-4\sin^2\frac{B}{2}+2\sin\frac{B}{2}+1<\frac{5}{4}$$

Vậy $a+b<\frac{5}{4}c$ (đpcm) *1đ*

Câu 4: *(4 điểm)*

Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác, còn x, y, z là 3 số thực thoả điều kiện $ax+by+cz=0$. Chứng minh $xy+yz+zx\le 0$ (1)

Đáp án

Từ $ax + by + cz = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{ax+by}{c}$

$$(1) \Leftrightarrow xy - \frac{ax+by}{c}(x+y) \le 0$$

$$\Leftrightarrow cxy - (ax+by)(x+y) \le 0$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + xy(a+b+c) + by^2 \ge 0 \qquad (2)$$ *1đ*

1. Nếu $y = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow ax^2 \ge 0$ (2) đúng

2. Nếu $y \ne 0$ thì (2) $\Leftrightarrow a\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + (a+b-c)\dfrac{x}{y} + b \ge 0$ (3) *1đ*

Xét tam thức bậc hai

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + (a+b-c)\frac{x}{y} + b \ \ (a > 0)$$

Có $\Delta = (a+b-c)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ab - 2ac$ *1đ*

3. Do a, b, c là 3 cạnh tam giác

$\Rightarrow |a - b| < c \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 < c^2$

$|b - c| < a \Rightarrow b^2 - 2bc + c^2 < a^2$

$|c - a| < b \Rightarrow c^2 - 2ac + a^2 < b^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ac$

$\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow f\left(\dfrac{x}{y}\right) > 0$ (do $a > 0$)

$\Rightarrow$ (3) đúng $\Rightarrow$ đpcm

Dấu bằng xảy ra khi $y = 0$. Khi đó từ $ax^2 \ge 0 \Rightarrow x = 0$ do đó $z = 0$ *1đ*

Câu 5: *(3 điểm)*

Trong mặt phẳng cho 6 điểm. Các điểm được nối với nhau từng cặp một bởi các cạnh xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn tồn tại tam giác có các cạnh cùng màu.

Đáp án

+ Chọn điểm P bất kỳ từ 6 điểm từ P có 5 cạnh nối đến 5 điểm còn lại.

Như vậy theo nguyên lý Dirichlet có $3 = \left\lceil \dfrac{5}{2} \right\rceil$ ([x] là số nguyên nhỏ nhất $\ge x$) cạnh cùng màu PP_1, PP_2, PP_3 *1đ*

+ Giả sử đó là màu xanh.

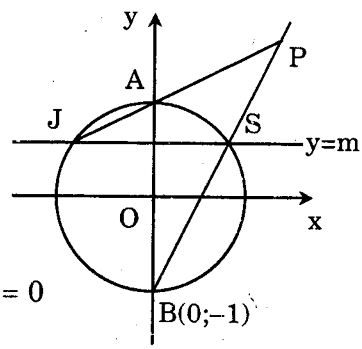
– Nếu các cạnh P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 màu đỏ thì ta có $\Delta P_1P_2P_3$ cùng màu *1đ*

– Nếu một trong các cạnh P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 có màu xanh, giả sử đó là P_iP_j thì ΔPP_iP_j cùng màu xanh *1đ*

Câu 6: *(3 điểm)*

Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$. Đường tròn (C) cắt trục tung ở A(0; 1) và B(0; –1). Đường thẳng $y = m$ $(-1 < m < 1, m \neq 0)$ cắt (C) tại J và S. Đường thẳng qua A, J cắt đường thẳng qua B, S tại P. Tìm tập hợp các điểm P khi m thay đổi.

Đáp án



+ Giả sử $S(x_0; y_0) \Rightarrow J(-x_0; y_0)$ *1đ*

$S \in (C) \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = 1$

$\overrightarrow{JA} = (x_0; 1 - y_0)$

$\overrightarrow{BS} = (x_0; y_0 + 1)$

Đường thẳng JA có phương trình:

$$\frac{x - 0}{x_0} = \frac{y - 1}{1 - y_0} \Leftrightarrow (1 - y_0)x - x_0y + x_0 = 0$$

Đường thẳng BS có phương trình:

$$\frac{x - 0}{x_0} = \frac{y + 1}{y_0 + 1} \Leftrightarrow (y_0 + 1)x - x_0y - x_0 = 0$$

Toạ độ giao điểm P của JA và BS thoả mãn hệ phương trình: *1đ*

$$\begin{cases} (1 - y_0) - x_0y + x_0 = 0 & (1) \\ (y_0 + 1) - x_0y - x_0 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) $\Rightarrow -2y_0x + 2x_0 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{x_0}{y_0}$ thay vào (1)

$$\Leftrightarrow (1 - y_0)\left(\frac{x_0}{y_0}\right) - x_0y + x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0}{y_0} - x_0 - x_0y + x_0 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{y_0}$$

Từ $x_0^2 + y_0^2 = 1$ chia 2 vế cho y_0^2 *1đ*

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{y_0^2} + 1 = \frac{1}{y_0^2} \Leftrightarrow x^2 + 1 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = -1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{1} = 1$$

Vậy tập hợp P là Hypebol (H) có phương trình $\dfrac{y^2}{1} - \dfrac{x^2}{1} = 1$

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN – BÀ RỊA VŨNG TÀU

Câu 1: *(3 điểm)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(4-y^2) = 8y \\ y(4-z^2) = 8z \\ z(4-x^2) = 8x \end{cases}$.

Đáp án

* x, y, z là nghiệm thì x, y, z khác ±2. *0,5đ*

* Ta có: $z = \dfrac{8x}{4-x^2}$; $y = \dfrac{8z}{4-z^2}$; $x = \dfrac{8y}{4-y^2}$ *0,5đ*

* Đặt $x = 2\tan\alpha$ với $\alpha \in (-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2})$

$\Rightarrow z = 2\tan2\alpha$; $y = 2\tan\alpha$; $x = 2\tan8\alpha$. *0,5đ*

* Dẫn đến $\tan8\alpha = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{7}k\pi$. *0,7đ*

* Chọn được $k \in \{0; \pm1; \pm2; \pm3\}$ và kiểm lại, ta được nghiệm của hệ.

0,7đ

Câu 2: *(4 điểm)*

Cho a; b; c là ba số nguyên dương thỏa mãn (a; b; c) = 1 và $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$.

Chứng minh: a + b; a – c; b – c là các số chính phương.

Đáp án

* Từ giả thiết ta có: $(a + b)c = ab$. *0,5đ*

* Gọi r là ước nguyên tố của (a + b) $\Rightarrow$ r/ab $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} r/a \\ r/b \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} r/a \\ r/b \end{cases}$ *1đ*

* Vậy r không là ước của c. *0,5đ*

* Do đó r^2 là ước của (a + b) $\Rightarrow$ (a + b) là số chính phương. *1đ*

* Tương tự với: $(a - c)b = ac$; $(b - c)a = bc$ ta được (a – c); (b – c) là các số chính phương. *1đ*

Câu 3: *(3 điểm)*

Đáp án

Ta có:

+) $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow f \le 1$ *0,5đ*

+) $a(b + c) > a^2, b(a + c) > b^2, c(a + b) > c^2 \Rightarrow 2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2$

$\Rightarrow f > \frac{1}{2}$ *0,5đ*

+) Ta chứng tỏ f nhận mọi giá trị thuộc $(\frac{1}{2};1]$.

Xét $y = \frac{x.1 + 1.1 + 1.x}{x^2 + 1^2 + 1^2} \Leftrightarrow y = \frac{2x+1}{x^2+2}$. *0,5đ*

Khi $x \in (0; 1] \Rightarrow y \in (\frac{1}{2};1]$. *0,5đ*

Khi $y \in (\frac{1}{2};1]$, giải phương trình trên ta chọn được $x \in (0; 1]$ *1đ*

Vậy nếu $f \in (\frac{1}{2};1]$ thì tồn tại tam giác cạnh x; 1; 1, với $x \in (0; 1]$ sao cho

$\frac{x.1 + 1.1 + 1.x}{x^2 + 1^2 + 1^2} = f$. Do đó $(\frac{1}{2};1]$ là tập cần tìm. *1đ*

Câu 5: *(3 điểm)*

Từ 2008 số nguyên cho trước ta chọn 21 số và thêm vào mỗi số đó 1 đơn vị. Lặp lại phép biến đổi đó. CMR: ta có thể có được 2008 số bằng nhau, sau một số hữu hạn lần biến đổi.

Đáp án

Tồn tại x; y nguyên dương thỏa $21x = 2008y + 1$. *0,5đ*

Trước tiên ta xếp các số đã cho vòng quanh một đường tròn, theo hướng dương, số sau không nhỏ hơn số trước (trừ số cuối cùng). Bắt đầu từ số nhỏ nhất (kề số lớn nhất về hướng âm) lần lượt thêm 1 đơn vị cho mỗi số trong 21 số liên tiếp, theo hướng dương, vẫn với hướng đó thực hiện với 21 số tiếp theo, lặp lại phép biến đổi x lần, ta đi được y vòng và một số. *1đ*

Như vậy số khởi đầu được tăng thêm hơn đúng một đơn vị so với các số còn lại. Nếu có đúng một số nhỏ nhất thì (max – min) đã giảm 1 đơn vị. *1đ*

Nếu có k số nhỏ nhất (bằng nhau) thì sau k lần thực hiện như trên (mỗi lần cần xếp lại) ta cũng có (max – min) đã giảm 1 đơn vị. Nhưng (max – min) bị chặn dưới bởi 0, nên quá trình trên phải có lúc đến đạt được (max – min) = 0. Khi đó các số bằng nhau. *0,5đ*

Câu 6: *(3 điểm)*

Cho F là một tiêu điểm của elip (E). Ba tia gốc F đôi một tạo với nhau góc 120^0, chúng cắt (E) ở M; N; P. Chứng tỏ: $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}+\frac{1}{FP}$ không đổi, khi M; N; P thay đổi.

Đáp án

Chọn hệ trục tọa độ sao cho (E) có phương trình chính tắc. *0,5đ*

Không giảm tổng quát, xét $x_F > 0$ và (FM; FN) = $120^0 + k360^0$ *0,5đ*

Gọi φ là góc định hướng tạo bởi tia Fx với tia FM.

Ta chứng minh được $FM = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi}$. *1đ*

Từ đó ta có: $FN = \frac{b^2}{a + c\cos(\varphi + 120^0)}$;

$$FP = \frac{b^2}{a + c\cos(\varphi + 240^0)}.$$ *0,5đ*

Từ đó suy ra đpcm. *0,5đ*

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN – TP ĐÀ NẴNG

Câu 1:

Với a; b; c; d $\in$ R \ {30; 4; 14; 10} là bốn tham số đôi một phân biệt và x; y; z; t là các ẩn số, hãy giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a-30}+\dfrac{y}{a-4}+\dfrac{z}{a-14}+\dfrac{t}{a-10}=1, \\ \dfrac{x}{b-30}+\dfrac{y}{b-4}+\dfrac{z}{b-14}+\dfrac{t}{b-10}=1, \\ \dfrac{x}{c-30}+\dfrac{y}{c-4}+\dfrac{z}{c-14}+\dfrac{t}{c-10}=1, \\ \dfrac{x}{d-30}+\dfrac{y}{d-4}+\dfrac{z}{d-14}+\dfrac{t}{d-10}=1. \end{cases}$$

Đáp án

Với mỗi bộ (x; y; z; t) xét đa thức bậc bốn $P(s) \in R[s]$ được cho bởi:

$$P(s) := (s-30)(s-4)(s-14)(s-10) - x(s-4)(s-14)(s-10) -$$
$$- y(s-30)(s-1)(s-14)(s-10) -$$
$$- z(s-30)(s-10) - t(s-30)(s-4)(s-14).$$

Ta có: (x; y; z; t) là nghiệm của hệ đã cho nếu và chỉ nếu a; b; c; d là 4 nghiệm, phân biệt (theo giả thiết), của phương trình P(s) = 0 (ẩn số s); tức là, khi và chỉ khi:

$$P(s) \equiv e(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) =: Q(s), \ (1)$$

với e = 1 (hệ số bậc 4 của P).

Do $\deg(P - Q) \le 3$ nên điều kiện cần và đủ để có (1) là đa thức P – Q triệt tiêu tại ít nhất là 4 điểm (lấy các điểm $s_1 = 30$, $s_2 = 4$, $s_3 = 14$, $s_4 = 10$):

$$P(30) = Q(30),\ P(4) = Q(4),\ P(14) \text{ và } P(10) = Q(10) \ (2)$$

Cuối cùng:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -8320x = (a-30)(b-30)(c-30)(d-30) \\ 1560y = (a-4)(b-4)(c-4)(d-4) \\ 640z = (a-14)(b-14)(c-14)(d-14) \\ -480t = (a-10)(b-10)(c-10)(d-10). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{(a-30)(b-30)(c-30)(d-30)}{8320} \\ y = \dfrac{(a-4)(b-4)(c-4)(d-4)}{1560} \\ z = \dfrac{(a-14)(b-14)(c-14)(d-14)}{640} \\ t = -\dfrac{(a-10)(b-10)(c-10)(d-10)}{480}. \end{cases}$$

Câu 2: Tìm tất cả các số nguyên dương m thỏa mãn điều kiện:

$$\forall a \in Z, \forall \in Z, a^2 \equiv b^2 \text{ (modm)} \Rightarrow a \equiv \pm b\text{(modm)}$$

Đáp án

Ta sẽ chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để:

$\forall a \in Z, \forall b \in Z, a^2 \equiv b^2 \text{ (modm)} \Rightarrow a \equiv \pm b\text{(modm)}$ (1)

là: m = 1 hoặc m nguyên tố, hoặc m = 2p với p là một số nguyên tố lẻ. (2)

Điều kiện cần: Giả sử (1) đúng. Khi đó, ta có:

Bổ đề 1: Nếu m = x.y với x; y $\in N^* \setminus \{1\}$, thì x = 2 hoặc y = 2

Chứng minh: Với m = x.y; trong đó, x; y $\in N^* \setminus \{1\}$ đặt a := x + y; b := x − y $\in$ Z, ta có:

$A^2 - b^2 = 4xy = 4m \;\vdots\; m \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \text{ (modm)} \Rightarrow a \equiv \pm b\text{(modm)}$ (theo (1))

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2y = (a-b) \vdots m = xy \\ 2x = (a+b) \vdots m = xy \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \vdots x \\ 2 \vdots y \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2. \end{array}\right.$$

Bổ đề 2: m không chia hết cho 4.

Chứng minh: Giả sử n = 4α với α $\in N^*$. Đặt b := 0; a := 2α $\in$ Z, ta có:

$A^2 = 4\alpha^2 \equiv 0\text{(mod}4\alpha) \equiv b^2\text{(modm)} \Rightarrow a \equiv \pm b \equiv 0\text{(modm)}$ (theo (1))

$\Rightarrow 2\alpha = a \;\vdots\; m = 4\alpha$,

vô lý! Cả hai bổ đề đều đã được chứng minh.

Trở lại bài toán, giả sử *m* là một hợp số. Theo Bổ đề 1, m = 2p với p $\in N^* \setminus \{1\}$. Nếu p = α.β với α; β $\in N^* \setminus \{1\}$, thì m = (2α).β với 2α ≠ 2, nên – vẫn theo Bổ đề 1 – ta có β = 2 ⇒ m = 4α, mâu thuẫn với Bổ đề 2! Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng p là một số nguyên tố; hơn nữa, p lẻ (lại do Bổ đề 2); tức là, (2) đúng.

Điều kiện đủ: Giả sử đã có (2). Nếu m = 1 hoặc m nguyên tố, dễ thấy (1) đúng. Chỉ còn phải xét trường hợp m = 2p với p là một số

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = (x+1)\overrightarrow{MO}$$

$$\Leftrightarrow (4-x)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}. \qquad (3)$$

i. Khi $x \neq 4$, vị trí duy nhất của điểm M thỏa (3) được cho bởi

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4-x}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}).$$

ii. Với $x = 4$, mọi điểm M đều thỏa (3) nếu tâm ngoại tiếp O của ngũ giác ABCDE cũng là trọng tâm của nó (tức là nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$), và không có điểm M nào thỏa (3) nếu O không phải là trọng tâm của ngũ giác ABCDE.

Câu 4:

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức $A = 6xy - 6yz - zx$ khi ba số thực x; y và z thay đổi nhưng luôn thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Đáp án

I. $\max\limits_{x^2+y^2+z^2=1} A$

Trước tiên ta tìm các số thực M sao cho:

$$A \le M(x^2 + y^2 + z^2) \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow My^2 = 6(x-z)y + M(x^2+z^2) + zx \ge 0 \qquad (2)$$

với mọi số thực x; y; z (không nhất thiết phải thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 1$)

Rõ ràng, cần có $M \neq 0$ vì vậy, vế trái của (2) là một tam thức bậc hai đối với y; từ đó, ta có điều kiện (tương đương) đối với M là: $M > 0$ và $\Delta'_y = 9(x-z)^2 - M[M(x^2+z^2) + zx] \le 0$

$\Leftrightarrow (M^2 - 9)x^2 + (M + 18)zx + (M^2 - 9)z^2 \ge 0$ với mọi số thực x; z.

Vẫn theo cách trên, điều này đúng khi và chỉ khi:

$$M > 0 \text{ và } \Delta_x = [(M+18)^2 - 4(M^2-9)^2]z^2 \le 0 \ \forall z$$

$$\Leftrightarrow [M + 18 + 2(M^2-9)]\cdot[M + 18 - 2(M^2-9)] \le 0$$

$$\Leftrightarrow M(1+2M)(2M^2 - M - 36) \ge 0 \Leftrightarrow 2M^2 - M - 36 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (M+4)(2M-9) \ge 0 \Leftrightarrow M \ge 9/2 \ (>3).$$

Đặc biệt, (1) cho thấy: khi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ thì $A \le M := 9/2$; dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{(M+18)z}{2(M^2-9)} \\ y = \dfrac{3(x-z)}{M} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = \dfrac{-4z}{3} \\ z = \pm\dfrac{3}{\sqrt{34}} \end{cases}.$$

Vậy, $\max\limits_{x^2+y^2+z^2=1} A = 9/2$.

II. $\min\limits_{x^2+y^2+z^2=1} A$

Trước tiên ta cũng đi tìm các số thực m sao cho

$$A \geq m(x^2 + y^2 + z^2) \ (1')$$

$$\Leftrightarrow my^2 - 6(x - z)y + m(x^2 + z^2) + zx \leq 0$$

với mọi số thực x; y; z. Điều kiện (tương đương) đối với m là: $m < 0$ và

$$\Delta'_y = 9(x - z)^2 - m[m(x^2 + z^2) + zx] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 9)x^2 + (m + 18)zx + (m^2 - 9)z^2 \geq 0$$

với mọi số thực x; z. Giải ra ta được $m \leq -4$

Đặc biệt, (1') cho thấy: khi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ thì $A \geq m := -4$ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = -\dfrac{(m+18)z}{2(m^2-9)} \\ y = \dfrac{3(x-z)}{m} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = \dfrac{3z}{2} \\ z = \pm\dfrac{2}{\sqrt{17}}. \end{cases}$$

Vậy, $\min\limits_{x^2+y^2+z^2=1} A = -4$.

Ghi chú. Thay vì sử dụng phương pháp tam thức bậc hai, học sinh có thể làm theo phương pháp khác; chẳng hạn, dùng bất đẳng thức $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = \beta$) và có:

$$A = \frac{1}{2}(4x)(3y) + \frac{1}{2}(3y)(-4z) + (-z)x$$

$$\leq \frac{1}{4}[(4x)^2 + (3y)^2] + \frac{1}{4}[(3y)^2 + (-4z)^2] + \frac{1}{2}[(-z)^2 + x^2]$$

$$\leq \frac{9}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{9}{2};$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 4x = 3y = -4z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$

Từ đó, $\max\limits_{x^2+y^2+z^2=1} A = 9/2$.

Câu 5:

Với x; y; z là ba số thực dương bất kỳ, đặt $P = (xy\sqrt{3} + yz + zx)^2$ và $\alpha = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}$; $\beta = \sqrt{y^2 + z^2 + yz\sqrt{3}}$, $\gamma = \sqrt{z^2 + x^2 + zx\sqrt{3}}$.

Hãy tìm một công thức cho phép tính trực tiếp P theo α; β; γ không thông qua x; y; z.

Đáp án

Trên mặt phẳng (đã được định hướng) lấy ba tia Ou, Ov, Ow thỏa:

$$(Ou, Ov) \equiv 60^0(\text{mod}360^0),\ (Ov, Ow) \equiv 150^0(\text{mod}360^0) \qquad (1)$$

($\Rightarrow (Ow, Ou) \equiv 150^0(\text{mod}360^0)$); và lần lượt trên ba tia đó, lấy các điểm A, B, C sao cho OA = x, OB = y, OC = z (đvđd). Theo (1), định lý côsin trong các tam giác OAB, OBC, OCA cho ta: AB = α, BC = β, CA = γ (đvđd).

Rõ ràng O nằm trong tam giác ABC nên

$$S = S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA}$$

$$= \frac{1}{2}(OA.OB.\sin(Ou, Ov) + OB.OC.\sin(Ov, Ow)$$

$$+ OC.OA.\sin(Ow, Ou)) = \frac{1}{4}\sqrt{P} \text{ (đvdt)}$$

Vậy, áp dụng công thức Hê-rông, ta có:

$$P = 16S^2 = (\alpha + \beta)(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)(\alpha + \beta - \gamma)$$

Câu 6:

Cho ABC là một tam giác nhọn có đỉnh A cố định; các đỉnh B và C di động trên đường thẳng Δ cố định, không đi qua A. Gọi H và O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó. Hãy tìm quỹ tích điểm O để tam giác AOH cân tại A.

Đáp án

Lấy K = $hc_\Delta(A)$ (hình chiếu của A trên Δ) và M = $hc_\Delta(O)$ (M là trung điểm của BC). Gọi N và P lần lượt là trung điểm của CA và AB. Phép vị tự với tâm là trọng tâm G của ΔABC tỉ số vị tự k = –1/2, biến ΔABC thành ΔMNP và biến H thành O; do đó:

$$\overline{AH} = -2\overline{MO} \Rightarrow AH = 2OM = 2d(O, \Delta). \qquad (1)$$

Trên mặt phẳng chứa A và Δ, xét hypebol (H) nhận Δ làm đường chuẩn ứng với tiêu điểm A và có tâm sai e = 2. (H) gồm hai nhánh; ta gọi (H)' là nhánh nằm trong nửa mặt phẳng (α) chứa A và có bờ là Δ (nhánh kia nằm ngoài (α)). Trung trực Δ'(// Δ) của AK cắt (H)' tại hai điểm X, Y (đối xứng với nhau qua AK). Trên (H)', xét cung (C) được giới hạn bởi hai đầu mút X, Y (không kể hai đầu mút này).

Ta thấy: ΔAOH cân tại A khi và chỉ khi

$$OA = AH \Leftrightarrow OA = 2d(O, A) \text{ (do (1))}$$

$$\Leftrightarrow O \in (H)$$

Vì ΔABC nhọn nên K phải nằm ở giữa B và C, suy ra (OA = OB = OC > OK. Bất đẳng thức OA > OK chứng tỏ rằng O nằm trong nửa mặt phẳng (β) chứa Δ và có bờ là Δ'. Mặt khác, một tam giác là nhọn khi và chỉ khi tâm ngoại tiếp của tam giác thì nằm trong tam giác đó; vậy, $O \in (\alpha)$. Cuối cùng, $O \in (\alpha) \cap (\beta)$, nên O chỉ chạy trên (C).

Đảo lại, ứng với mỗi $O \in (C)$, dễ thấy đường tròn (O; OA) cắt Δ tại hai điểm B, C phân biệt ($OA = 2d(O, \Delta) > d(O, \Delta)$) mà điểm O (tâm ngoại tiếp của ΔABC) nằm trong ΔABC; suy ra, quỹ tích phải tìm là cung (C).

Ghi chú. Khi O trùng với giao điểm của AK và (C) thì AOH là một tam giác cân suy biến: $H \equiv O$ (ΔABC đều).

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT LÊ QUÝ ĐÔN – TỈNH KHÁNH HÒA

Câu 1:

Tính số đo các góc của tam giác ABC có diện tích S và có độ dài các cạnh là a, b, c và thỏa mãn hệ thức:

$$(\sqrt{2}-1)(a^2+b^2)+c^2=4S$$

Đáp án

Ta có $(a+kb)^2 \geq 4kab \geq 4kab\sin(C+45^0)$

(Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ a = kb và C = 45^0)

$\Leftrightarrow (a+kb)^2 \geq 2kab\sqrt{2}\sin C + 2kab\sqrt{2}\cos C$

$\Rightarrow 2(a^2+k^2b^2) \geq 4k\sqrt{2}S + k\sqrt{2}\ (a^2+b^2-c^2)$ (do $(a+kb)^2 \leq 2(a^2+k^2b^2)$)

$\Leftrightarrow (2-k\sqrt{2})a^2+(2k^2-k\sqrt{2})b^2+k\sqrt{2}c^2 \geq 4k\sqrt{2}S$

Chọn k = 1 ta có: $(\sqrt{2}-1)a^2+(\sqrt{2}-1)b^2+c^2 \geq 4S$

Hay $(\sqrt{2}-1)(a^2+b^2)+c^2=4S$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b và C = 45^0.

Tức là tam giác ΔABC cân tại $\widehat{C}=45^0$, $\widehat{A}=\widehat{B}=67^0,5$.

Câu 2:

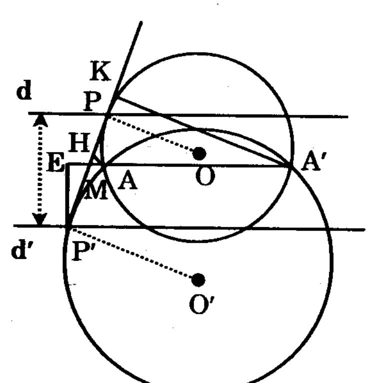
Cho 2 điểm A, A' cố định, AA' = a và 2 đường thẳng d, d' song song cách đều A, A' một khoảng bằng h.

a) CM: $\forall P \in d$ (P không thuộc đường trung trực AA',thì $\exists$ P' $\in$ d' sao cho PP' là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn (PAA') và (P'AA')

b) Chứng minh tích các khoảng cách từ A, A' đến đường thẳng PP' là không đổi.

c) Tìm quỹ tích hình chiếu của A trên PP'.

Đáp án



a) Với mọi P $\in$ d ta dựng đường tròn (AA'P) rồi dựng tiếp tuyến với (AA'P) tại P, tiếp tuyến này cắt (d') tại P'. Lại dựng đường tròn (AA'P')

Gọi M = AA'$\cap$ PP'

Khi đó M là trung điểm PP' và

$$MP'^2 = MP^2 = \overline{MA}.\overline{MA'}$$

Suy ra PP' tiếp xúc với đường tròn (AA'P') tại P'.

Hay PP' là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn (AA'P) và (AA'P').

b) Do: $\Delta P'EH \sim \Delta AHM \sim \Delta A'KM$

Ta có: $\dfrac{AH}{EP'} = \dfrac{AM}{MP'} \Rightarrow AH = \dfrac{h}{2}.\dfrac{AM}{MP'}$

và $\dfrac{A'K}{EP'} = \dfrac{A'M}{MP'} \Rightarrow A'K = \dfrac{h}{2}.\dfrac{A'M}{MP'} \Rightarrow AH.A'K = \dfrac{h^2}{4}$

c) Đặt AH = x, A'K = y, theo câu b ta có: $xy = \dfrac{h^2}{4}$.

Gọi I là trung điểm AA'. Khi đó:

$$IH^2 = \frac{x^2 + HK^2 + y^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow 2IH^2 = (x-y)^2 + \frac{h^2}{2} + HK^2 - \frac{a^2}{2} = a^2 + \frac{h^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2 + h^2}{2}.$$

$$\Rightarrow IH^2 = \frac{a^2 + h^2}{4}.$$

Vậy tập hợp điểm H là đường tròn tâm I, bán kính $R = \dfrac{\sqrt{a^2 + h^2}}{2}$

Câu 3:

Giải bất phương trình:

$$2x + 1 + x\sqrt{x^2 + 2} + (x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} < 0$$

Đáp án

Đặt $a = \sqrt{x^2 + 2} \geq 0$ và $b = \sqrt{x^2 + 2x + 3} \geq 0$ khi đó bất phương trình viết lại là:

$$b^2 - a^2 + \frac{1}{2}(b^2 - a^2 - 1)a + \frac{1}{2}(b^2 - a^2 + 1)b < 0$$

$$\Leftrightarrow (b - a)(a + b + 1)^2 < 0 \quad \Leftrightarrow b < a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2} > \sqrt{x^2 + 2x + 3} \quad \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x < -\dfrac{1}{2}$.

Câu 4:

Cho hàm: $f(x) = \sqrt{3 + x} + \sqrt{6 - x} - \sqrt{(3 + x)(6 - x)}$

a) Tìm m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất

b) Tìm m để bất phương trình $f(x) \leq m$ có nghiệm

c) Tìm m để bất phương trình $f(x) \leq m$ đúng $\forall x \in [-3, 6]$

Đáp án

a) Để ý rằng: x_0 là nghiệm phương trình thì $3 - x_0$ **cũng là nghiệm phương trình.**

Phương trình có nghiệm duy nhất thì $x_0 = 3 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}$, thay vào phương trình $\Rightarrow m = 3\sqrt{2} - \frac{9}{2}$.

Lại thay $m = 3\sqrt{2} - \frac{9}{2}$ vào để giải phương trình **ta thấy phương trình chỉ có đúng một nghiệm là** $x = \frac{3}{2}$. Vậy giá trị $m = 3\sqrt{2} - \frac{9}{2}$ là thỏa mãn yêu cầu đề bài.

b) Đặt $t = \sqrt{3 + x} + \sqrt{6 - x} \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{(3 + x)(6 - x)} = \frac{t^2 - 9}{2}$. Vì: $2\sqrt{(3 + x)(6 - x)} \leq 9$ (BĐT Côsi)

$\Rightarrow 9 \leq t^2 \leq 18 \Leftrightarrow t \in [3, 3\sqrt{2}]$

Bất phương trình $f(x) \leq m$ viết lại là: $t^2 - 2t \geq 9 - 2m$

Xét hàm $g(t) = t^2 - 2t$ đồ thị là parabol, hàm $y = g(t)$ **có bảng biến thiên là:**

t	$-\infty$	1	3	$3\sqrt{2}$	$+\infty$
g(t)	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow 3 \leq g(t) \leq 18 - 6\sqrt{2}$

Từ đó để thỏa yêu cầu câu b thì:

$$9 - 2m \leq 18 - 6\sqrt{2} \Leftrightarrow 3\sqrt{2} - \frac{9}{2} \leq m.$$

và để thỏa yêu cầu câu c thì: $9 - 2m \leq 3 \Leftrightarrow 3 \leq m$.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH – ĐỒNG NAI

Câu 1:

Giải hệ: $\begin{cases} 8x^3.y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$.

Đáp án

Từ pt(1) $\Rightarrow y \neq 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 + \dfrac{27}{y^3} = 18 \\ \dfrac{4x^2}{y} + 6\dfrac{x}{y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x)^3 + (\dfrac{3}{y})^3 = 18 \\ 2x.\dfrac{3}{y}.(2x + \dfrac{3}{y}) = 3 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a = 2x \\ b = \dfrac{3}{y} \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 = 18 \\ a.b(a + b) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a.b = 1 \end{cases}$

Do đó: $\begin{cases} a = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ b = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ b = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\left(\dfrac{3 - \sqrt{5}}{4}; \dfrac{6}{3 + \sqrt{5}}\right); \left(\dfrac{3 + \sqrt{5}}{4}; \dfrac{6}{3 - \sqrt{5}}\right)$

Câu 2:

Giải phương trình: $x^2 - 2x - 3 = \sqrt{x + 3}$

Đáp án

$$\text{Pt} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = (x + 3) + \sqrt{x + 3} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = \left(\sqrt{x + 3} + \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \pm\left(\sqrt{x + 3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-1=\sqrt{x+3}) \vee \left(-x=\sqrt{x+3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \vee x=1-\sqrt{13}$$

Câu 3: Cho a, b, c ≥ 0. Chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+2ab+1 \geq 2(ab+bc+ca) \qquad (1)$$

Đáp án

Ta chứng minh bằng phương pháp tam thức bậc hai

$(1) \Leftrightarrow f(a)=a^2+2(bc-b-c)a+(b-c)^2+1\geq 0$ (2)

Tam thức bậc hai f(a) có $\Delta'=bc(b-2)(c-2)-2$

Xét các trường hợp

Nếu $b.c-b-c\geq 0 \Rightarrow (1)$ đúng (đpcm)

Nếu $b.c-b-c\leq 0$ (nghĩa là $(b-1)(c-1)\leq 1$)

Chia làm hai trường hợp

Trong 2 số b, c có 1 số lớn hơn 2; 1 số bé hơn hoặc bằng 2; ta có ngay $\Delta'\leq 0$

Cả 2 số $b<2$ và $c<2$, khi đó $\begin{cases} b(2-b)\leq 1 \\ c(2-c)\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta'\leq 0$

Vậy: $f(a)\geq 0$ (đpcm)

Câu 4:

Cho tam giác ABC; điểm M tùy ý trong tam giác ABC. Gọi A_1; B_1; C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB. Chứng minh: $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{MA_1}+\frac{1}{MB_1}+\frac{1}{MC_1}\right)$

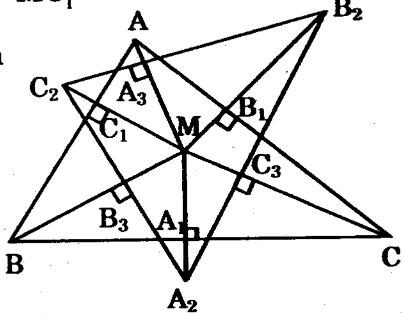
Đáp án

(Sử dụng bất đẳng thức Erdos)

$$MA+MB+MC\geq 2(MA_1+MB_1+MC_1) \qquad (1)$$

Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm nằm trên tia MA_1, MB_1, MC_1 sao cho:

$$MA_2 = \frac{1}{MA_1}; MB_2 = \frac{1}{MB_1}; MC_2 = \frac{1}{MC_1}$$



Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là các điểm nằm trên tia MA, MB, MC sao cho:

$$MA_3 = \frac{1}{MA}; MB_3 = \frac{1}{MB}; MC_3 = \frac{1}{MC}.$$

Ta có: tam giác MB_1A đồng dạng tam giác MB_2A_3 (do góc M chung)

và $\frac{MB_1}{MA} = \frac{MA_3}{MB_2} \Rightarrow \widehat{MA_3B_2} = \widehat{MB_1A} = 90^0$.

Cm tương tự có $\widehat{MA_3C_2} = 90^0$ suy ra B_2, A_3, C_2 thẳng hàng.

Cm tương tự có C_2, B_3, A_2 thẳng hàng và A_2, C_3, B_2 thẳng hàng

Áp dụng bất đẳng thức Erdos trong tam giác $A_2B_2C_2$, ta có:

$$MA_2 + MB_2 + MC_2 \geq 2(MA_3 + MB_3 + MC_3)$$

Suy ra: $\frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1} + \frac{1}{MC_1} \geq 2\left(\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}\right)$.

Từ đó suy ra đpcm.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH – PHÚ YÊN

Câu 1: ***(3 điểm)***

Tìm tất cả các cặp số thực (x; y) thoả mãn bất phương trình:

$$x - |y| - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \geq 1$$

Đáp án

Ta có: $x - |y| - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \leq x - |y| - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x - |y| - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 1 \leq (x - |y| - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x \geq |y| + 1 \\ x^2 + y^2 - 1 \leq x^2 + y^2 + 1 - 2x|y| - 2x + 2|y| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x \geq |y| + 1 \\ 2x(|y| + 1) - 2(|y| + 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 & (1) \\ x \geq |y| + 1 & (2) \\ 2(|y| + 1)(x - 1) \leq 0 & (3) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $x \geq 1$

Từ (3) suy ra $x \leq 1$

Do đó $x = 1$, khi đó (2) suy ra $y = 0$

Với $x = 1$, $y = 0$ thoả (1).

Vậy có duy nhất một cặp số thực (x; y) thoả mãn bất phương trình là $x = 1$, $y = 0$.

Câu 2: ***(3 điểm)***

Xác định tất cả các nghiệm số nguyên của phương trình vô định:

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$$

Đáp án

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + y^2) + y(x^2 + y^2) = 8(x^2 + y^2) + 8xy + 8$$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x + y - 8) = 8xy + 8 \qquad (1)$

Suy ra x, y có chung tính chẵn lẻ và x + y – 8 là chẵn.

* Nếu x + y – 8 ≥ 6 thì $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq \frac{14^2}{2} > 4$

Suy ra $(x^2 + y^2)(x + y - 8) \geq 6(x^2 + y^2) \geq 2(x^2 + y^2) + 8xy > 8 + 8xy$, phương trình (1) không thoả.

* Nếu x + y – 8 ≤ –4 thì $(x^2 + y^2)(x + y - 8) \leq -4(x^2 + y^2) \leq 8xy < 8 + 8xy$, phương trình (1) không thoả.
* Nếu x + y – 8 = 4 thì (1): $4(x^2 + y^2) = 8xy + 8 \Leftrightarrow (x - y)^2 = 2$, PT không có nghiệm nguyên.
* Nếu x + y – 8 = 2 thì (1): $x^2 + y^2 = 4xy + 4$

  Khi đó $x + y = 10, xy = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$
* Nếu x + y – 8 = 0 thì (1): 8xy + 8 = 0 ⇔ xy + 1 = 0,

  PT không có nghiệm nguyên vì x + y = 8
* Nếu x + y – 8 = –2 thì (1): $x^2 + y^2 + 4xy + 4 = 0$

  Khi đó x + y, xy = –20: không có nghiệm nguyên.

  Kết luận: Nghiệm nguyên của phương trình là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$

Câu 3: ***(3 điểm)***

Cho A, B, C là ba góc của một tam giác ABC thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} = 2\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Đáp án

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \qquad (1)$$

Mặt khác bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}} \qquad (2)$$

Ta lại có bất đẳng thức quen thuộc: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$ **(3)**

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\geq 2\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các bất đẳng thức (1), (2), (3) xảy ra dấu bằng, suy ra

$$\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}$$

Do đó tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 4: *(4 điểm)*

Cho x, y, z là các số thực không âm bất kì. **Tìm giá trị lớn nhất** của biểu thức

$$P=\frac{x^2}{4x^3+3yz+2}+\frac{y^2}{4y^3+3zx+2}+\frac{z^2}{4z^3+3xy+2}$$

Đáp án

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$4x^3+2=2\left(x^3+x^3+1\right)\geq 2.3\sqrt[3]{x^3.x^3.1}=6x^2 (1)$$

Nếu cả ba số x, y, z đều bằng 0 thì P = 0

Nếu có hai trong ba số x, y, z bằng 0, chẳng hạn y = z = 0 thì

$$P=\frac{x^2}{4x^3+2}\leq\frac{1}{6}$$

Nếu có một trong ba số x, y, z bằng 0, chẳng hạn z = 0, thì

$$P=\frac{x^2}{4x^3+2}+\frac{y^2}{4y^3+2}\leq\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi x = y = 1.

Xét cả ba số x, y, z đều dương.

Từ (1) suy ra: $\frac{x^2}{4x^3+3yz+2}\leq\frac{x^2}{6x^2+3yz}$

Tương tự ta có: $\frac{y^2}{4y^3+3zx+2}\leq\frac{y^2}{6y^2+3zx}$, $\frac{z^2}{4z^3+3xy+2}\leq\frac{z^2}{6z^2+3xy}$

Suy ra $P \le \dfrac{x^2}{6x^2+3yz} + \dfrac{y^2}{6y^2+3zx} + \dfrac{z^2}{6z^2+3xy}$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2+\frac{yz}{x^2}} + \frac{1}{2+\frac{zx}{y^2}} + \frac{1}{2+\frac{xy}{z^2}}\right)$$

Đặt $a = \dfrac{yz}{x^2}, b = \dfrac{zx}{y^2}, c = \dfrac{xy}{z^2}$ thì a, b, c > 0 và abc = 1.

Khi đó $P \le \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2+a} + \dfrac{1}{2+b} + \dfrac{1}{2+c}\right)$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{(2+b)(2+c)+(2+a)(2+c)+(2+a)(2+b)}{(2+a)(2+b)(2+c)}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{12+4(a+b+c)+ab+bc+ca}{9+4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)}\right) \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $ab + bc + ca \ge 3\sqrt[3]{ab.bc.ca} = 3$ (vì abc = 1)

Do đó $9 + 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca)$

$\ge 12 + 4(a + b + c) + ab + bc + ca$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $P \le \dfrac{1}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1, hay x = y = z = 1.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{1}{3}$, đạt được khi trong 3 số x, y, z có hai số bằng 1 và số còn lại bằng 0, hoặc cả 3 số đều bằng 1.

Câu 5: *(3 điểm)*

Cho 1005 số nguyên thuộc tập hợp {1; 2; 3; ...; 2008}.

Chứng minh rằng trong 1005 số nguyên trên luôn tồn tại hai số để số này chia hết cho số kia.

Đáp án

Gọi 1005 số nguyên đó là $a_1, a_2, ..., a_{1005}$

Ta phân tích mỗi số theo ước số của 2:

$$a_1 = 2^{m_1} b_1,\ a_2 = 2^{m_2} b_2, ...,\ a_{1005} = 2^{m_{1005}} b_{1005}$$

trong đó m_i và b_i là các số lẻ thuộc tập hợp

{1; 2; 3; ...; 2008} (i = 1,2, ..., 1005)

Trong tập hợp {1; 2; 3; ...; 2008} có 1004 số lẻ, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại i, j $\in$ {1; 2; 3; ...; 1005} để $b_i = b_j$.

Như vậy $a_i = 2^{m_i} b_i$, $a_j = 2^{m_j} b_i$

Giả sử $a_i > a_j$, suy ra $a_i \vdots a_j$.

Câu 6: *(3 điểm)*

Trên đoạn AD cố định dựng hình bình hành ABCD sao cho $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BD}{AB}$. Tìm quỹ tích điểm B.

Đáp án

Chọn hệ trục toạ độ sao cho A, D nằm trên trục hoành và A(0; 0), D(1; 0)

Đặt B(x, y), thì C(x + 1; y)

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BD}{AB} \Leftrightarrow (AC.AB)^2 = (AD.BD)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+1)^2 + y^2\right](x^2 + y^2) = \left[(x-1)^2 + y^2\right]$$

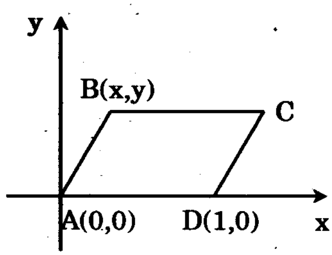
$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2x) = 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)2x - 1 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 + 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 2$$



Vậy quỹ tích của B là đường tròn tâm I(–1; 0), bán kính R = $\sqrt{2}$.

Hay quỹ tích của B là đường tròn tâm I là điểm đối xứng của D qua A, bán kính R = $\sqrt{2}$.AD.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT LƯU VĂN LIỆT – VĨNH LONG

Câu 1: *(3 điểm)*

Cho k là một số thực khác 1, giải hệ sau:

$$\begin{cases}(x+y+z)(kx+y+z)=k^3+2k^2\\(x+y+z)(x+ky+z)=4k^2+8k\\(x+y+z)(x+y+kz)=4k+8\end{cases}$$

Đáp án

• Đặt s = x + y + z, từ hệ phương trình (I) suy ra:

$$s(kx+2x+ky+2y+kz+2z)=k^3+6k^2+12k+8$$

$$\Leftrightarrow s(x+y+z)(k+2)=(k+2)^3 \Leftrightarrow s^2(k+2)=(k+2)^2\ (1) \qquad 1đ$$

• Nếu s = 0 thì k = – 2 và nếu k = – 2 thì ta có x = y = z = 0

Giả sử $s \neq 0$ và $k \neq -2$ ta có $s = \pm(k+2)$ (do (1))

i) $s = k + 2$: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases}kx+y+z=k^2\\x+ky+z=4k\\x+y+kz=4\end{cases}$

Ta được $x=\dfrac{(k-2)(k+1)}{k-1}$, $y=\dfrac{3k-2}{k-1}$, $z=\dfrac{-(k-2)}{k-1}$ *1đ*

ii) $s = -(k + 2)$: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases}kx+y+z=-k^2\\x+ky+z=-4k\\x+y+kz=-4\end{cases}$

Ta được $x=-\dfrac{(k-2)(k+1)}{k-1}$, $y=-\dfrac{3k-2}{k-1}$, $z=\dfrac{k-2}{k-1}$ *1đ*

Câu 2: *(4 điểm)*

Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn $p \equiv 1 \pmod 3$ và đặt $q=\left[\dfrac{2p}{3}\right]$.

Chứng minh: Nếu $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots+\dfrac{1}{(q-1).q}=\dfrac{m}{n}$ với hai số nguyên m và n thì p/m.

Đáp án

- Ta có : p ≡ 1 (mod6). Đặt p = 6k + 1, suy ra $q = \left[\frac{2p}{3}\right] = 4k$ *1đ*

- Khi đó: $\frac{m}{n} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(q-1).q}$

$$= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(4k-1).4k}$$

$$= \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + ... + \frac{1}{4k}$$ *1đ*

$$= \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{4k}\right) + \left(\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{4k-1}\right) + ... + \left(\frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1}\right)$$

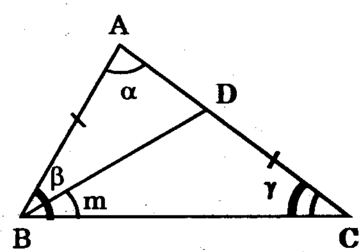
$$= \frac{p}{(2k+1)(4k)} + \frac{p}{(2k+2)(4k-1)} + ... + \frac{p}{(3k)(3k+1)}$$ *1đ*

$\Rightarrow p / m$ *1đ*

Câu 3: *(3 điểm)*

Cho tam giác ABC có AB < AC, số đo các góc A, B, C lần lượt là α, β, γ. Trong đoạn AC lấy điểm D sao cho AB = CD, góc $\widehat{CBD}$ có số đo là m. Biết rằng $\frac{\alpha}{4} = \frac{\gamma}{3} = \frac{m}{5}$. Tìm số đo các góc trong tam giác ABC.

Đáp án



- Đặt $\frac{\alpha}{4} = \frac{\gamma}{3} = \frac{m}{5} = x$, ta có: α = 4x,

  γ = 3x, m = 5x và $0 < x < \frac{\pi}{5}$

  (vì 0 < m < π)

Khi đó $\frac{\sin\widehat{C}}{BD} = \frac{\sin\widehat{CBD}}{CD}$ và $\frac{\sin\widehat{A}}{BD} = \frac{\sin\widehat{BDA}}{AB}$ *1đ*

$$\Rightarrow \frac{\sin 3x}{BD} = \frac{\sin 5x}{AB} \text{ và } \frac{\sin 4x}{BD} = \frac{\sin 8x}{AB} \text{ (vì AB = CD)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 8x}{\sin 4x} = \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$$

$\Rightarrow\ 2\sin 3x.\cos 4x = \sin 5x$ (vì $0 < x < \frac{\pi}{5}$)   (1)   *0,5đ*

• **Giải (1) với $0 < x < \frac{\pi}{5}$, ta được $x = \frac{\pi}{18}$**   *0,5đ*

• **Vậy số đo các góc trong tam giác ABC là**

$$\alpha = \frac{2\pi}{9};\ \gamma = \frac{\pi}{6};\ \beta = \frac{11\pi}{18}$$ *1đ*

Câu 4: ***(4 điểm)***

Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+abc}{b+c}+\frac{b^3+abc}{c+a}+\frac{c^3+abc}{a+b} \geq a^2+b^2+c^2 \quad (1)$$

Đáp án

• **Giả sử $a \geq b \geq c$, ta có:**

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{b+c}(a-b)(a-c)+\frac{b}{c+a}(b-a)(b-c)$$

$$+\frac{c}{a+b}(c-a)(c-b) \geq 0$$ *0,5đ*

• **Mặt khác: do $\frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{c+a}$ và $(a-b)(a-c) \geq 0$, nên**

$$\frac{a}{b+c}(a-b)(a-c)+\frac{b}{c+a}(b-a)(b-c)$$

$$\geq \frac{b}{c+a}(a-b)(a-c)+\frac{b}{c+a}(b-a)(b-c)$$ *1đ*

$$\geq \frac{b}{c+a}(a-b)^2 \geq 0$$ *1đ*

• **Tương tự ta có $\frac{c}{a+b}(c-a)(c-b) \geq 0$**   *1đ*

• **Vậy:** $\frac{a}{b+c}(a-b)(a-c)+\frac{b}{c+a}(b-a)(b-c)+$

$$+\frac{c}{a+b}(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3+abc}{b+c}+\frac{b^3+abc}{c+a}+\frac{c^3+abc}{a+b} \geq a^2+b^2+c^2$$ *0,5đ*

Câu 5: *(3 điểm)*

Cho hai số nguyên dương k và n, với $1 \le k \le n$. Xét tất cả các tập hợp con của $M = \{1, 2, ..., n\}$, mỗi tập hợp con có k phần tử. Trong mỗi tập hợp con ta chọn số bé nhất.

Chứng minh rằng trung bình cộng của các số được chọn là $\frac{n+1}{k+1}$.

Đáp án

- Các tập hợp con của M có phần tử được chọn là 1, 2, ..., $n - k + 1$ và cách cấu tạo các tập hợp này như sau: nếu lấy $A \subset M \setminus \{1\}$, A có $k - 1$ phần tử, thì $\{1\} \cup A$ là tập hợp có k phần tử, trong đó số 1 là phần tử bé nhất. *1đ*

Do đó có:

C_{n-1}^{k-1} tập hợp con có số bé nhất là 1

C_{n-2}^{k-1} tập hợp con (có k phần tử) có số bé nhất là 2

....

$C_{n-(n-k+1)}^{k-1}$ tập hợp con (có 2 phần tử) có số bé nhất là $n - k + 1$ *1đ*

- Ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{C_n^k}\left[1C_{n-1}^{k-1} + 2C_{n-2}^{k-1} + \cdots + (n-k+1)C_{n-(n-k+1)}^{k-1}\right] = \frac{n+1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow 1C_{n-1}^{k-1} + 2C_{n-2}^{k-1} + \cdots + (n-k+1)C_{k-1}^{k-1} = C_{n+1}^{k+1} \quad (1)$$ *0,5đ*

+ Ta có: $C_{n+1}^{k} = C_n^{k-1} + C_n^k \Leftrightarrow C_{n+1}^k - C_n^k = C_n^{k-1}$.

+ Gọi VT là vế trái của (1)

$VT = 1(C_n^k - C_{n-1}^k) + 2(C_{n-1}^k - C_{n-2}^k) + \ldots + (n-k)(C_{k+1}^k - C_k^k) + (n-k+1)C_k^k$

$= C_n^k + C_{n-1}^k + ... + C_{k+1}^k + C_k^k = C_{n+1}^{k+1}$ *0,5đ*

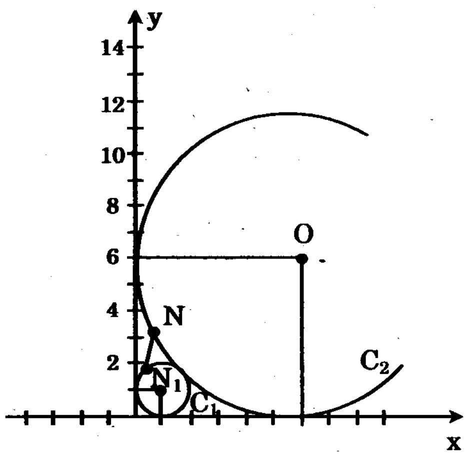
Câu 6: *(3 điểm)*

Cho 4 số a, b, c, d thỏa $a^2 + b^2 + 1 = 2(a + b)$ và $c^2 + d^2 + 36 = 12(c + d)$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

Đáp án



- Ta có: $a^2 + b^2 + 1 = 2(a + b)$

  $\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 1$ (1)

  $c^2 + d^2 + 36 = 12(c + d)$

  $\Leftrightarrow (c - 6)^2 + (d - 6)^2 = 36$ (2) *1đ*

- Trong mặt phẳng Oxy, xét hai điểm M(a; b) và N(c; d). Ta có $F = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = MN$

  M và N lưu động trên đường tròn (C_1) có tâm I(1; 1) và bán kính $R_1 = 1$ và đường tròn (C_2) có tâm J(6; 6) và bán kính $R_2 = 6$ (do (1)) *1đ*

- Vậy: $\max(F) = IJ + (R_1 + R_2) = 5\sqrt{2} + 7$,

  $\min(F) = IJ - (R_1 + R_2) = 5\sqrt{2} - 7$. *1đ*

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG – TP. CẦN THƠ

Câu 1: *(3 điểm)*

Trong các nghiệm thực (x, y, z, t) của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + t^2 = 2 \\ xt + yz \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

Hãy tìm nghiệm sao cho tổng y + t nhỏ nhất.

Đáp án

Cách 1: Theo bđt B.C.S: $xt + yz \leq |xt + yz| \leq \sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + t^2)} = \sqrt{2}$

Từ đó hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + t^2 = 2 \\ xt + yz = \sqrt{2} \\ t = kx \\ z = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + t^2 = 2 \\ t = \sqrt{2}x \\ z = \sqrt{2}y \end{cases} \quad (*)$$

Ta có: $(y + t)^2 = y^2 + t^2 + 2yt = 3 - x^2 - z^2 + 2xz = 3 - (x - z)^2 \leq 3$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} \leq y + t \leq \sqrt{3}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi x = z. Khi đó kết hợp với (*) ta được:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + t^2 = 2 \\ x = z = \sqrt{2}y \\ t = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \dfrac{1}{3} \\ x = z = \sqrt{2}y \\ t = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}; x = z = \dfrac{\sqrt{6}}{3}; t = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}; x = z = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}; t = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Suy ra $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}; -\dfrac{\sqrt{6}}{3}; -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ là nghiệm của hệ thỏa $(y + t)_{min} = -\sqrt{3}$

Cách 2: Giả sử hệ đã cho có nghiệm. Khi đó tồn tại các góc α và β sao cho: $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, $z = \sqrt{2}\cos\beta$, $t = \sqrt{2}\sin\beta$

Từ bất phương trình thứ ba của hệ, ta có:

$\sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta \geq 1 \Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta) \geq 1 \Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta) = 1$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Suy ra $\sin\alpha = \cos\beta$, $\cos\alpha = \sin\beta$ và

$$y + t = \sin\alpha + \sqrt{2}\sin\beta = \sin\alpha + \sqrt{2}\cos\alpha \geq -\sqrt{3}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha + \sqrt{2}\cos\alpha}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \ \cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Từ đó: $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}; y = -\frac{\sqrt{3}}{3}; z = -\frac{\sqrt{6}}{3}; t = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Thử lại ta thấy thỏa hệ đã cho.

Vậy $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ là nghiệm của hệ để y + t nhỏ nhất.

Câu 2: ***(3 điểm)***

Tìm tất cả các nghiệm tự nhiên của phương trình:

$$4x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 2008$$

Đáp án

Từ cách cho phương trình ta suy ra $y = 2m$ và $z = 2n$ ($m, n \in N$).

Phương trình trở thành: $x^2 + 5m^2 + 6n^2 = 502$ (1)

Ta có $x^2 \equiv 0,1 \pmod 3$, $5m^2 \equiv 0,2 \pmod 3$, $6n^2 \equiv 0 \pmod 3$,

$$502 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow m \equiv 0 \pmod 3 \qquad (2)$$

Do (1) nên $m^2 \leq \frac{502}{5} < 84$ (3)

(2) và (3) cho ta $m \in \{0; 3; 6; 9\}$. Vậy x, n chỉ có thể là nghiệm tự nhiên của:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 6n^2 = 502 \\ x^2 + 6n^2 = 457 \\ x^2 + 6n^2 = 322 \\ x^2 + 6n^2 = 97 \end{array}\right. \qquad (4)$$

Xét phương trình (4), ta có $n^2 \le \frac{502}{6} < 84 \Rightarrow n = \overline{1,9}$. Phép thử trực tiếp cho nghiệm x = 4, n = 9.

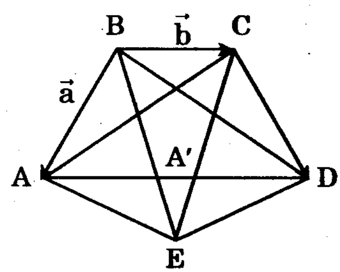
Tương tự các phương trình còn lại có thêm các nghiệm (x; n) là (19; 4) và (1; 4).

Vậy phương trình có tất cả 3 nghiệm: (4; 0; 18), (19; 6; 8), (1; 18; 8).

Câu 3: *(3 điểm)*

Ngũ giác lồi ABCDE có mỗi cạnh của nó song song với một đường chéo và AB + BC = a, trong đó a là một số thực dương không đổi cho trước. Tính giá trị lớn nhất có thể có của diện tích ngũ giác ABCDE và hãy chỉ ra một cách dựng ngũ giác thỏa giá trị ấy.

Đáp án



Gọi $A' = CE \cap AD$,

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA'} = \vec{b}$

Từ giả thiết ta luôn có:

$\overrightarrow{A'D} = k.\vec{b}$, $\overrightarrow{A'E} = k'.\vec{a}$ (k, k' > 0)

$\Rightarrow \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{A'D} - \overrightarrow{A'E} = k.\vec{b} - k'.\vec{a}$ (1)

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \vec{b} - \vec{a}$ (2)

Vì $\overrightarrow{ED}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng nên (1) và (2) cho ta k = k'

Lại có:

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'E} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A'E} = \vec{b} + k.\vec{a}$ (3)

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'D}$

$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'D} = (k+1)\vec{b} + \vec{a}$ (4)

Vì $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng nên (3) và (4) cho ta:

$$k + 1 = \frac{1}{k} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Từ đó $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A'D} = (k+1)\overrightarrow{BC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{BC}$

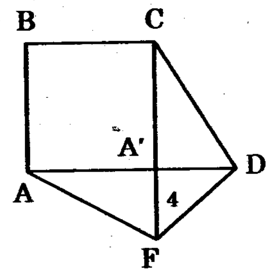
$$\Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Gọi S là diện tích của ngũ giác ABCDE, ta có:

$S = S_{ABC} + S_{ACA'} + S_{CDE} + S_{AA'E} = 3S_{ABC} + S_{AA'E}$

(do $S_{CDE} = S_{CDB} = S_{CAB} = S_{CAA'}$)

Mặt khác:



$$\frac{S_{AA'E}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AA'E}}{S_{ABE}} = \frac{AA'}{DA} = \frac{BC}{AD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Từ đó: $S = \frac{5+\sqrt{5}}{2} S_{ABC} = \frac{5+\sqrt{5}}{4} AB.BC.\sin B$

$$\le \frac{5+\sqrt{5}}{4}.\left(\frac{AB+BC}{2}\right)^2 = \frac{a^2(5+\sqrt{5})}{16}$$

Suy ra $S_{max} = \frac{a^2(5+\sqrt{5})}{16}$ đạt được khi $AB = BC = \frac{a}{2}$ và $B = 90^0$.

Ta có một cách dựng ngũ giác thỏa giá trị trên như hình vẽ.

Ở đây ABCA' là hình vuông cạnh $\frac{a}{2}$ và $\frac{AA'}{AD} = \frac{CA'}{CE} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Câu 4: ***(3 điểm)***

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa:

$$\frac{1}{a+2} + \frac{2007}{2008+b} \le \frac{c+1}{2007+c}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a+1)(b+1)(c+1)$

Đáp án

Đặt $x = a + 1$, $y = b + 1$, $z = c + 1$

Bất đẳng thức đã cho tương đương:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2007}{2007+y} \le \frac{z}{2006+z} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{2007}{2007+y} + \frac{2006}{2006+z} \le 1 \quad (1)$$

Từ (1) và theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \ge \frac{2007}{2007+y} + \frac{2006}{2006+z} \ge 2\sqrt{\frac{2007}{2007+y}.\frac{2006}{2006+z}}$$

$$\frac{y}{2007+y} = 1 - \frac{2007}{2007+y} \ge \frac{1}{x+1} + \frac{2006}{2006+z} \ge 2\sqrt{\frac{1}{x+1}.\frac{2006}{2006+z}}$$

$$\frac{z}{2006+z} = 1 - \frac{2006}{2006+z} \ge \frac{2007}{2007+y} + \frac{1}{x+1} \ge 2\sqrt{\frac{2007}{2007+y}.\frac{1}{z+1}}$$

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$xyz \ge 8.\ 2006.2007 = 32208336$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{1}{x+1}=\frac{2007}{2007+y}=\frac{2006}{2006+z}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=4014\\z=4012\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=4013\\c=4011\end{cases}$$

Vậy $P_{min} = 32208336$ đạt được khi a = 1, b = 4013, c = 4011.

Câu 5: ***(3 điểm)***

Cho hàm số:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{2008}(k-2008x)^2C_{2008}^k x^k(1-x)^{2008-k}$$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn [0; 1].

Đáp án

Ta có $A=\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=(nx)^2\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+$

$$+\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}-2nx\sum_{k=0}^{n}kC_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

Xét: $A_1=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}kC_n^k x^k(1-x)^{n-k}$

$$=n\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}=nx\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$=nx[x+(1-x)]^{n-1}=nx$$

$$A_2=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}kC_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}+n\sum_{k=1}^{n}(k-1)C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=nx+n\sum_{k=2}^{n}(k-1)C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=nx+n(n-1)\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}x^k(1-x)^{n-k}=nx+n(n-1)x^2$$

$$A_3=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=[x+(1-x)]^n=1$$

Vậy $A=(nx)^2+nx+n(n-1)x^2-2(nx)^2=nx(1-x)$

Áp dụng kết quả trên ta được $f(x) = 2008x(1 - x)$

Do $x \in [0; 1]$ nên $x, 1 - x \geq 0$. Từ đó theo bất đẳng thức Côsi:

$$f(x) \leq 2008.\left(\frac{x+(1-x)}{2}\right)^2 = 502$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$. Vậy $\max f(x) = 502$ đạt được khi $x = \frac{1}{2}$.

Câu 6. *(3 điểm)*

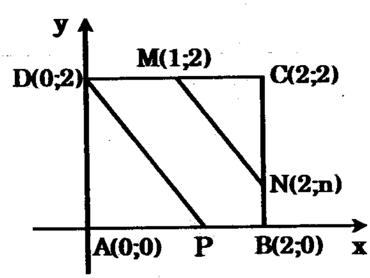
Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 2. Gọi M là trung điểm của cạnh CD, N là điểm di động trên cạnh BC sao cho $BN = n$ $(0 \leq n \leq 1)$ và P là điểm nằm trên cạnh AB sao cho DP song song với MN. Chứng minh đường thẳng PN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Đáp án

Chọn mp tọa độ Oxy sao cho $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $D(0; 2)$

Suy ra $C(2; 2)$, $M(1; 2)$, $N(2; n)$.

Đường thẳng PN đi qua $D(0; 2)$ và song song với MN nên có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{MN} = (1; n - 2)$



$\Rightarrow$ pt PD: $(n - 2)x - y + 2 = 0$.

$$\Rightarrow P\left(-\frac{2}{n-2}; 0\right)$$

$\Rightarrow$ pt PN: $n(n - 2)x + (2 - 2n)y + 2n = 0$.

Gọi I là tâm của hình vuông thì $I(1; 1)$, ta có:

$$d(I; DN) = \frac{|n(n-2) + 2 - 2n + 2n|}{\sqrt{n^2(n-2)^2 + (2-2n)^2}} = \frac{|n(n-2)+2|}{\sqrt{[n(n-2)+2]^2}} = 1$$

Chứng tỏ đường thẳng PN luôn tiếp xúc đường tròn cố định tâm $I(1; 1)$, bán kính $R = 1$ (đpcm).

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM – QUẢNG NAM

Câu 1: *(3 điểm)*

Tìm các bộ số (x, y, z, t) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 50 \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 252 \\ x^2t^2 + y^2z^2 = 2xyzt \end{cases}$$

Đáp án

- Ta viết lại hệ đã cho dưới dạng:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 12 \\ (x + t)^2 + (y + z)^2 - 2xt - 2yz = 50 \\ (x + t)\left[(x + t)^2 - 3xt\right] + (y + z)\left[(y + z)^2 - 3yz\right] = 252 \\ (xt - yz)^2 = 0 \end{cases} \qquad \textit{1đ}$$

- Từ phương trình $(xt - yz)^2 = 0$, suy ra: $xt = yz$

Đặt $x + t = a$, $y + z = b$, $xt = yz = c$. Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ a^2 + b^2 - 4c = 50 \\ a(a^2 - 3c) + b(b^2 - 3c) = 252 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 12 \\ (a + b)^2 - 2ab - 4c = 50 \\ a^3 + b^3 - 3c(a + b) = 252 \end{cases} \qquad \textit{0,5đ}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 12 \\ ab + 2c = 47 \\ (a + b)\left[(a + b)^2 - 3\,ab\right] - 36c = 252 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 12 \\ ab + 2c = 47 \\ ab + c = 41 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 7 \\ c = 6 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} a = 7 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases} \qquad \textit{0,5đ}$$

- Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x + t = 5 \\ y + z = 7 \\ xt = yz = 6 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x + t = 5 \\ y + z = 7 \\ xt = yz = 6 \end{cases} \qquad \textit{0,5đ}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (2; 1; 6; 3); (2; 6; 1; 3); (3; 1; 6; 2) (3; 6; 1; 2); (1; 2; 3; 6); (1; 3; 2; 6); (6; 2; 3; 1); (6; 3; 2; 1) . *0,5đ*

Câu 2: *(4 điểm)*

Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn phương trình:

$$3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3x^2y^2 - 18x - 6 = 0.$$

Đáp án

- Ta có: $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3x^2y^2 - 18x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 6x + 9) + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 3)^2 + (3y^2 + 2)(z^2 + 2) = 37$$

Dễ dàng ta thấy: $3(x - 3)^2 \leq 33 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \leq 11$ *0,5đ*

Suy ra $(x - 3)^2$ nhận các giá trị {0, 1, 4, 9} *1đ*

- Với $(x - 3)^2 = 0$ suy ra: $(3y^2 + 2)(z^2 + 2) = 37$.

* Nhận xét: $(3y^2 + 2) \geq 2$, $(z^2 + 2) \geq 2$ (*)

Vậy trong trường hợp này phương trình vô nghiệm. *0,5đ*

- Với $(x - 3)^2 = 1$ suy ra: $(3y^2 + 2)(z^2 + 2) = 34$ (1)

Do (*) nên (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 + 2 = 17 \\ z^2 + 2 = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 3y^2 + 2 = 2 \\ z^2 + 2 = 17 \end{cases}$

(không tồn tại giá trị nguyên x, y)

Vậy trong trường hợp này phương trình vô nghiệm. *0,5đ*

- Với $(x - 3)^2 = 4$ suy ra: $(3y^2 + 2)(z^2 + 2) = 25$ (2)

Do (*) nên (2) $\begin{cases} 3y^2 + 2 = 5 \\ z^2 + 2 = 5 \end{cases}$ (không tồn tại giá trị nguyên x, y)

Vậy trong trường hợp này phương trình vô nghiệm. *0,5đ*

- Với $(x - 3)^2 = 9$ suy ra: $(3y^2 + 2)(z^2 + 2) = 10$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 + 2 = 2 \\ z^2 + 2 = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 3y^2 + 2 = 5 \\ z^2 + 2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

- Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên: (6, 1, 0); (6, –1, 0), (0, 1, 0); (0, –1, 0) *0,5đ*

Câu 3: *(3 điểm)*

Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 1. Trên cạnh AB và AD lấy hai điểm M, N sao cho chu vi tam giác AMN bằng 2. Hai tia CM, CN chia đường chéo BD thành ba đoạn thẳng. Gọi S là diện tích của tam giác có độ dài bằng độ dài ba đoạn thẳng đó.

Chứng minh rằng: $S \le \dfrac{1}{(2+\sqrt{2})^2}$

Đáp án

- Dựng hình vuông CDPQ, trên DP lấy điểm M' sao cho: BM = DM'.

Suy ra: CM = CM'. (1)

Ta có: NM' = ND + DM' = ND + BM = AD + AB – (AN + AM).

= 2 – (2 – NM) = NM (2) *1đ*

- Từ (1) và (2) suy ra: CN là đường trung trực của MM'.

Vậy M, M' đối xứng nhau qua CN.

+ Lấy H trên đoạn NM sao cho NH = ND.

Suy ra: H đối xứng D qua CN.

Ta lại có: F $\in$ CN $\Rightarrow$ FD = FH. (3)

Hơn nữa ta có: $\begin{cases} MH = DM' = BM \\ CH = CD = CM \end{cases}$

Suy ra: CM là đường trung trực của BH

Ta lại có: E $\in$ CM $\Rightarrow$ EH = EB. (4)

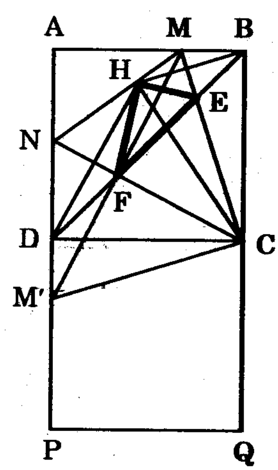
+ Từ (3) và (4) suy ra: S = diện tích tam giác EFH.

Ta có: $\widehat{EHF} = \widehat{EHC} + \widehat{CHF} = \widehat{EBC} + \widehat{CDF}$

$= 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

Vậy Δ EHF vuông tại H. Đặt x = HF, y = HE.

Suy ra: $S = \dfrac{1}{2}xy$ *1đ*



- Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$x + y \ge 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{2S}$

$\sqrt{x^2+y^2} \ge \sqrt{2xy} = 2\sqrt{S}$

Từ đó ta có bất đẳng thức sau:

$x + y + \sqrt{x^2+y^2} \ge 2(1+\sqrt{2})\sqrt{S}$ (*)

Ta có: $x + y + \sqrt{x^2+y^2} = HF + HE + EF$ (do Δ EHF vuông tại H)

$$= FD + BE + EF = BD = \sqrt{2}$$

Vậy từ (*) suy ra:

$$\sqrt{2} \geq 2(1+\sqrt{2})\sqrt{S} \Rightarrow \sqrt{S} \leq \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

Hay $\quad S \leq \dfrac{1}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow$ đpcm. *1đ*

Câu 4: *(4 điểm)*

Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + 2b + 3} + \frac{b}{b^2 + 2c + 3} + \frac{c}{c^2 + 2a + 3} \leq \frac{1}{2}$$

Đáp án

- Ta có: $a^2 + 1 \geq 2a$, $b^2 + 1 \geq 2b$, $c^2 + 1 \geq 2c$, suy ra *0,5đ*

$$\frac{a}{a^2 + 2b + 3} + \frac{b}{b^2 + 2c + 3} + \frac{c}{c^2 + 2a + 3} \quad \textit{0,5đ}$$

$$\leq \frac{a}{2(a+b+1)} + \frac{b}{2(b+c+1)} + \frac{c}{2(c+a+1)} \quad \textit{0,5đ}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a}{a+b+1} + \frac{b}{b+c+1} + \frac{c}{c+a+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 - (\frac{b+1}{a+b+1} + \frac{c+1}{b+c+1} + \frac{a+1}{c+a+1}\right] \quad \textit{0,5đ}$$

- Theo bất đẳng thức Bunhiacopxky, ta có:

$$\frac{b+1}{a+b+1} + \frac{c+1}{b+c+1} + \frac{a+1}{c+a+1}$$

$$= \frac{(b+1)^2}{(b+1)(a+b+1)} + \frac{(c+1)^2}{(c+1)(b+c+1)} + \frac{(a+1)^2}{(a+1)(c+a+1)}$$

$$\geq \frac{(a+b+c+3)^2}{(b+1)(a+b+1) + (c+1)(b+c+1) + (a+1)(c+a+1)}$$

- Ta lại có:

$$(b+1)(a+b+1) + (c+1)(b+c+1) + (a+1)(c+a+1)$$

$$= 3(a+b+c) + ab + bc + ca + a^2 + b^2 + c^2 + 3$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c + 3)^2 \text{ (Vì } a + b + c = 3)$$ *1đ*

- Vậy $\dfrac{b+1}{a+b+1} + \dfrac{c+1}{b+c+1} + \dfrac{a+1}{c+a+1} \geq 2$ *0,5đ*

Từ đó suy ra: $\left[3 - \left(\dfrac{b+1}{a+b+1} + \dfrac{c+1}{b+c+1} + \dfrac{a+1}{c+a+1}\right)\right] \leq 1$

Hay $\dfrac{a}{a^2 + 2b + 3} + \dfrac{b}{b^2 + 2c + 3} + \dfrac{c}{c^2 + 2a + 3} \leq \dfrac{1}{2}$ *(đpcm)*

- Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$. *0,5đ*

Câu 5: *(3 điểm)*

Cho n là số tự nhiên ≤ 2. Chứng minh rằng $\forall x$, ta có hệ thức:

$$C_{2008}^1 x(1-x)^{2007} + 2C_{2008}^2 x^2(1-x)^{2006} + \ldots + 2008.C_{2008}^{2008} x^{2008} = 2008x$$

Đáp án

- Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

$\forall k, n \in N$, $(k \leq n)$ ta đều có : $k.C_{n+1}^k = (n+1)C_n^{k-1}$

Thật vậy: $k.C_{n+1}^k = k.\dfrac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \dfrac{(n+1)!}{(k-1)![n-(k-1)]!}$

$$= (n+1)\frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!} = (n+1)C_n^{k-1}$$ *1đ*

- Áp dụng bổ đề trên ta có:

$$VT = C_{2008}^1 x(1-x)^{2007} + 2C_{2008}^2 x^2(1-x)^{2006} + \ldots + 2008.C_{2008}^{2008} x^{2008}$$

$$= 2008\left[C_{2007}^0 x(1-x)^{2007} + C_{2007}^1 x^2(1-x)^{2006} + \ldots + C_{2007}^{2007} x^{2008}\right]$$

$$= 2008x\left[C_{2007}^0 (1-x)^{2007} + C_{2007}^1 x(1-x)^{2006} + \ldots + C_{2007}^{2007} x^{2007}\right]$$

$$= 2008x\left[(1-x) + x\right]^{2007} = 2008x \text{ (Theo nhị thức Newton)}$$ *1đ*

- Vậy

$$C_{2008}^1 x(1-x)^{2007} + 2C_{2008}^2 x^2(1-x)^{2006}$$

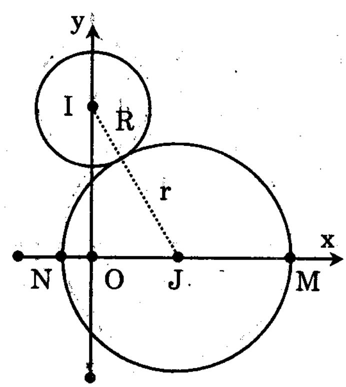
$$+ \ldots + 2008.C_{2008}^{2008} x^{2008} = 2008x$$ *1đ*

Câu 6: *(3 điểm)*

Trong mặt phẳng cho đường tròn $C_{(I,\ R)}$ tâm I bán kính R và một đường thẳng Δ. Gọi d là khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng Δ ($d > R$). Lấy hai điểm M, N trên đường thẳng Δ sao cho đường tròn đường kính MN tiếp xúc ngoài với đường tròn $C_{(I,\ R)}$. Chứng minh rằng luôn tồn tại điểm A trong mặt phẳng sao cho từ đó nhìn các đoạn thẳng MN dưới một góc không đổi.

Đáp án

- Chọn hệ trục Oxy, trục Ox chứa đường thẳng Δ, trục Oy đi qua I và vuông góc với Δ.
- Biểu diễn các điều kiện đề bài đã cho bằng phương pháp toạ độ: Chọn I(0; d), $J(x_o; 0)$ là trung điểm MN, $JM = r > 0$.
- Điều kiện để $C_{(I,\ R)}$ và $C_{(J,\ r)}$ tiếp xúc là: $IJ = r + R$



0,5đ

$$\Leftrightarrow IJ^2 = (r+R)^2 \Leftrightarrow x_0^2 + d^2 = (r+R)^2$$

* Do tính đối xứng nên nếu A tồn tại thì A phải nằm trên trục Oy. Đặt A(0; h) *0,5đ*

Tacó: $M(x_o + r; 0)$, $N(x_o - r; 0)$

$$\overrightarrow{AM} = (x_0 + r\ ;\ -h),$$

0,5đ

$$\overrightarrow{AN} = (x_0 - r\ ;\ -h)\ \cos\widehat{MAN} = \frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|.\left|\overrightarrow{AN}\right|}$$

$$= \frac{x_0^2 - r^2 + h^2}{\sqrt{(x_0+r)^2 + h^2}.\sqrt{(x_0-r)^2 + h^2}}$$

$$= \frac{x_o^2 - r^2 + h^2}{\sqrt{\left(x_o^2 - r^2\right)^2 + 2h^2\left(x_o^2 + r^2\right) + h^4}}$$ *0,5đ*

$$= \frac{R^2 + 2rR - d^2 + h^2}{\sqrt{\left(R^2 + 2rR - d^2\right)^2 + 2h^2\left[(r+R)^2 - d^2 + r^2\right] + h^4}}$$

$$= \frac{R^2 + 2rR - d^2 + h^2}{\sqrt{\left(R^2 + 2rR - d^2\right)^2 + 2h^2\left[(r + R)^2 - d^2 + r^2\right] + h^4}}$$ *0,5đ*

$$= \frac{R^2 + 2rR - d^2 + h^2}{\sqrt{\left(R^2 - d^2 + h^2 + 2rR\right)^2 + 4h^2r^2}}$$ *0,5đ*

Suy ra: $\dfrac{1}{\cos^2 \widehat{MAN}} = 1 + \dfrac{4h^2r^2}{\left(R^2 - d^2 + h^2 + 2rR\right)^2}$ (*)

- Biểu thức (*) là một hằng số khi:

$$R^2 - d^2 + h^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 = d^2 - R^2$$

Suy ra: toạ độ của điểm $A\left(0;\ \pm\sqrt{d^2 - R^2}\right)$.

Khi đó: $\dfrac{1}{\cos^2 \widehat{MAN}} = 1 + \dfrac{h^2}{R^2} = 1 + \dfrac{d^2 - R^2}{R^2} = \dfrac{d^2}{R^2}$

Suy ra: $\cos^2 \widehat{MAN} = \dfrac{R^2}{d^2}$, không đổi.

- Vậy luôn tồn tại điểm A trong mặt phẳng sao cho từ đó các nhìn đoạn thẳng MN dưới một góc không đổi.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN DU – ĐĂKLĂK

Câu 1:

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(a+c)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\geq 1$$

Đáp án

Theo Côsi với $x \geq 0$ ta có:

$$\sqrt{1+x^3}=\sqrt{(1+x)(1-x+x^2)}\leq\frac{(1+x)+(1-x+x^2)}{2}=1+\frac{x^2}{2}$$

Áp dụng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{b+c}{a})^3}}\geq\frac{1}{1+\frac{1}{2}(\frac{b+c}{a})^2}\geq\frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{a^2}}$$

$$=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} \qquad (1)$$

Tương tự: $$\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(a+c)^3}}\geq\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} \qquad (2)$$

$$\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\geq\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} \qquad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta được biểu thức cần chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Câu 2:

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+4xy=6\\2x^2+8=3y+7x\end{cases}$

Đáp án

Hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases}x^2+y^2+4xy=6 & (1)\\4x^2+16=6y+14x & (2)\end{cases}$

Cộng (1) và (2) ta được:

$$5x^2+y^2+4xy-6y-14x+10=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (2x+y-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (1;1)$

Câu 3:

Cho đa thức $P(x) = x^{15} - 2009x^{14} + 2009x^{13} - \ldots\ldots - 2009x^2 + 2009x$. Hãy tính $P(2009)$?

Đáp án

Với mỗi $n \in Z^+$

Ta có: $x^{n+2} - 2009x^{n+1} + 2008x^n = x^n(x-1)(x-2008)$

Do đó:

$$P(x) = (x^{15} - 2009x^{14} + 2008x^{13}) + (x^{13} - 2009x^{12} + 2008x^{11}) + \ldots\ldots + (x^3 - 2009x^2 + 2008x) + x.$$

$\Rightarrow P(x) = (x^{13} + x^{11} + \ldots\ldots + x)(x-1)(x-2008) + x$

$\Rightarrow P(2008) = 2008.$

Đáp số $P(2008) = 2008$.

Câu 4:

Xác định tất cả các hàm $f: R \to R$ thoả mãn:

$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2)$ (1) với mọi $x; y \in R$.

Đáp án

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases} \Rightarrow (x; y) = (\dfrac{u+v}{2}; \dfrac{u-v}{2})$

Thay vào (1) ta được: $vf(u) - uf(v) = (u^2 - v^2)u.v$

$$\Leftrightarrow \frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} = u^2 - v^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(u)}{u} - u^2 = \frac{f(v)}{v} - v^2 \text{ (2) với } \forall u; v \neq 0.$$

Đặt $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} - x^2$ thì từ (2) ta được:

$g(u) = g(v)$ với $\forall u; v \neq 0 \Rightarrow g(x) = a$ hằng số

$\Rightarrow f(x) = ax + x^3$ với a hằng số

Thử lại: Khi $f(x) = ax + x^3$. Thay vào (1) thoả mãn.

Vậy $f(x) = ax + x^3$ với a hằng số.

Câu 5:

Tìm tất cả các số nguyên x; y thoả mãn phương trình:

$$x^3 + 9xy + 127 = y^3$$

Đáp án

Cho $x = y + z$ thì phương trình trở thành:

$(3z + 9)y^2 + (3z^2 + 9z)y + (z^3 + 127) = 0$ (1) là phương trình bậc 2 theo y có:

$$\Delta = (3z + 9)^2.z^2 - 4(3z + 9)(z^3 + 127) = -(3z + 9)(z^3 - 9z^2 + 508)$$

Ta lại có: $z^3 - 9z^2 + 508 = z^2(z - 9) + 508$ không âm nếu và chỉ nếu $z \neq -5$ $(z \in Z)$

Và $3z + 9 \geq 0 \Leftrightarrow z \geq -3$

Ta có $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow z = -3; -4; -5$ mà ta có: $z^3 + 127 \equiv 0 \pmod{3}$ nên chỉ có $z = -4$ và khi đó phương trình (1) là:

$$-3y^2 + 12y + 63 = -3(y - 7)(y + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 7 \\ y = -3 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x; y) = (3;7)$ hoặc $(-7;-3)$

Câu 6:

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R). M là điểm trên cạnh AC; N là 1 điểm trên cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp của ΔCAN và ΔBCM cắt nhau tại 2 điểm C và D. Chứng minh rằng đường thẳng CD đi qua tâm O khi và chỉ khi đường trung trực của đoạn AB đi qua trung điểm của MN.

Đáp án

Sử dụng 2 bổ đề sau:

Bổ đề 1: Gọi M_1 là hình chiếu vuông góc của M lên AB; N_1 là hình chiếu vuông góc của N lên AB, chứng minh rằng trung trực (Δ) của AB đi qua trung điểm của MN khi và chỉ khi $AN_1 = BM_1$

Bổ đề 2: Tứ giác lồi PQRS có SR, RQ, QP, PS có độ dài lần lượt là a, b, c và d. Chứng minh rằng: Hai đường chéo $PR \perp QS$ khi và chỉ khi $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

Gọi O_1; O_2 là 2 tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCAN và ΔBCM có bán kính R_1; R_2 Suy ra $O \in CD \Leftrightarrow CO \perp O_1O_2$.

Xét tứ giác: COO_1O_2 ta suy ra:

• CD qua O $\Leftrightarrow$ CO $\perp O_1O_2$

• CO $\perp O_1O_2 \Leftrightarrow O_1C^2 + OO_2^2 = O_2C^2 + OO_1^2$

• $AN_1 = BM_1 \Leftrightarrow (\Delta)$ qua trung điểm của MN

Ta chứng minh: $O_1C^2 + OO_2^2 = O_2C^2 + OO_1^2 \Leftrightarrow AN_1 = BM_1$. (a)

Theo định lý hàm số Côsin:

$$OO_1^2 = O_1C^2 + OC^2 - 2O_1C.OC.\cos\widehat{O_1CO}$$
$$OO_2^2 = O_2C^2 + OC^2 - 2O_2C.OC.\cos\widehat{O_2CO}$$

$\Rightarrow O_1C^2 + OO_2^2 = O_2C^2 + OO_1^2 - 2OC(O_2C.\cos\widehat{O_2CO} - O_1C.\cos\widehat{O_1CO})$ (b)

Ta lại có: $\widehat{O_1CO} = \widehat{NAB}$ (1) và $\widehat{O_2CO} = \widehat{MBA}$ (2).

Theo định lý hàm số Sin: $2R_1 = \dfrac{AN}{\sin C}$ và $2R_2 = \dfrac{MB}{\sin C}$

$\Rightarrow O_2C.\cos\widehat{O_2CO} - O_1C.\cos\widehat{O_1CO} = 0$ (từ (a) và (b))

$\Leftrightarrow R_2\cos\widehat{MBA} - R_1\cos\widehat{NAB} = 0 \Leftrightarrow MB\cos\widehat{MBA} = AN\cos\widehat{NAB}$ (c)

Mà $MB\cos\widehat{MBA} = BM_1$ và $AN\cos\widehat{NAB} = AN_1$ nên (c)

$\Leftrightarrow BM_1 = AN_1$

Vậy đường thẳng CD qua O khi và chỉ khi (Δ) đi qua trung điểm của MN.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN NGỌC HIỂN – CÀ MAU

Câu 1: *(3 điểm)*

Tìm tất cả các cặp (x; y) với $x \in R$; $y \in R$ thỏa phương trình sau:

$$x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{x-1} = \frac{3}{2}xy$$

Đáp án

$$x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{x-1} = \frac{3}{2}xy \quad (*)$$

Cách 1:

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$

Ta có: $VT = x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{x-1}$

$= x\sqrt{1(y-1)} + 2y\sqrt{1(x-1)}$

$\leq x.\left[\dfrac{1+(y-1)}{2}\right] + 2y\left[\dfrac{1+(y-1)}{2}\right]$

$\leq \dfrac{xy}{2} + xy = \dfrac{3}{2}xy = VP$

Dấu "đẳng thức" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y-1=1 \\ x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

Cách 2:

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$

Phương trình (*)

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{2} - x\sqrt{y-1} + xy - 2y\sqrt{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}(y - 2\sqrt{y-1}) + y(x - 2\sqrt{x-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}[(y-1) - 2\sqrt{y-1} + 1] + y[(x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}(\sqrt{y-1} - 1)^2 + y(\sqrt{x-1} - 1)^2 = 0 \quad (**)$$

Do điều kiện $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 1 \end{cases}$ và $(\sqrt{y-1} - 1)^2 \ge 0$; $(\sqrt{x-1} - 1)^2 \ge 0$

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2}(\sqrt{y-1} - 1)^2 = 0 \\ y(\sqrt{x-1} - 2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy cặp (2; 2) là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 2: *(4 điểm)*

Tìm tất cả các bộ (x; y; z) với x; y; z là những số nguyên thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

Đáp án

Ta có: $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$

$\Leftrightarrow 27 - 3 = 3(x + y(y + z)(z + x)$

$\Leftrightarrow (x + y)(y + z)(z + x) = 8$ (*)

Đặt $\begin{cases} x + y = c \in Z \\ y + z = a \in Z \\ z + x = b \in Z \end{cases}$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow abc = 8$

$\Rightarrow a, b, c \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Vì các ẩn số x, y, z có vai trò bình đẳng trong hệ phương trình đã cho, giả sử $x \le y \le z \Rightarrow a \ge b \ge c$

Khi đó ta có: $a + b + c = 2(x + y + z) = 2.3 = 6 \Rightarrow a \ge 2$

Xét a = 2, ta có: $\begin{cases} b + c = 4 \\ bc = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Xét a = 4, ta có: $\begin{cases} b + c = 2 \\ bc = 1 \end{cases}$ (không có nghiệm nguyên)

Xét a = 8, ta có: $\begin{cases} b + c = -2 \\ bc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có bốn bộ nghiệm:

(1; 1; 1); (4; 4; –5); (4; –5; 4); (–5; 4; 4)

Câu 3: *(3 điểm)*

Cho tam giác ABC. Ở miền trong của tam giác đã cho có một điểm G. Các đường thẳng AG, BG, CG cắt các cạnh BC, CA, AB của tam giác lần lượt tại các điểm M, N, K thỏa điều kiện:

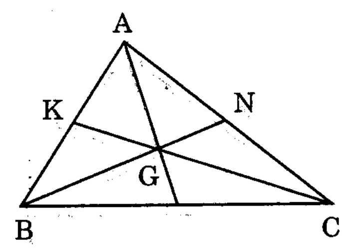
$$\frac{AG}{MG} + \frac{BG}{NG} + \frac{CG}{KG} = 6$$

Chứng minh rằng G là trọng tâm tam giác ABC.

Đáp án

Gọi S là diện tích tam giác. Gọi diện tích các tam giác GBC, GCA và GAB lần lượt là S_1; S_2 và S_3. Khi đó ta có: $S = S_1 + S_2 + S_3$

và $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{S_1 + S_2 + S_3}{S_1} = \dfrac{AM}{GM}$



$$\Leftrightarrow 1 + \frac{S_2}{S_1} + \frac{S_3}{S_1} = \frac{AM}{GM}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AG}{GM} = \frac{S_2}{S_1} + \frac{S_3}{S_1}$$

Tương tự: $\dfrac{BG}{NG} = \dfrac{S_1}{S_2} + \dfrac{S_3}{S_2}$

$$\frac{CG}{KG} = \frac{S_2}{S_3} + \frac{S_1}{S_3}$$

$$\Rightarrow \frac{AG}{MG} + \frac{BG}{NG} + \frac{CG}{KG} = \left(\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_1}{S_2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2}\right) + \left(\frac{S_1}{S_3} + \frac{S_3}{S_1}\right) \geq 6 \text{ (BĐT Côsi) (**)}$$

Từ (*) và (**), dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{3} \Leftrightarrow \text{G là trọng tâm tam giác ABC}$$

Chú ý: Có thể dùng định lý Céva để chứng minh.

Câu 4: *(4 điểm)*

Cho biểu thức $S = x^2(9\sqrt{1 + x^4} + 13\sqrt{1 - x^4})$ với $|x| \leq 1$

Tìm giá trị lớn nhất của S.

Đáp án

Ta có: $S = x^2(9\sqrt{1+x^4} + 13x^2\sqrt{1-x^4}$ với $|x| \le 1$

$$= 6\left(\frac{3}{2}x^2\right)\sqrt{1+x^4} + 26\left(\frac{x^2}{2}\right)\sqrt{1-x^4}$$

$$= 6\sqrt{\frac{9}{4}x^4(1+x^4)} + 26\sqrt{\frac{x^4}{4}(1-x^4)}$$

Vì $|x| \le 1$, áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$S \le 6\left(\frac{\frac{9}{4}x^4 + 1 + x^4}{2}\right) + 26\left(\frac{\frac{x^4}{4} + 1 + x^4}{2}\right)$$

$$= 3\frac{13}{4}x^4 + 1) + 13(1 - \frac{3}{4}x^4) = 16$$

Vậy $S_{max} = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{4}x^4 = 1 + x^4 \\ \frac{x^4}{4} = 1 - x^4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x^4 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow |x| = \sqrt[4]{\frac{4}{5}} \text{ (thỏa } |x| \le 1).$$

Câu 5: *(3 điểm)*

Một thiếu nữ muốn xâu 50 viên ngọc có màu sắc khác nhau thành một sợi dây chuyền đeo cổ. Hỏi có bao nhiêu cách xâu?

Đáp án

Số hoán vị thẳng của 50 viên ngọc là 50!

Ứng với mỗi hoán vị tròn có 50 cách chuyển đổi vị trí liên tiếp mà kết quả nhận được là như nhau, nên số hoán vị tròn của 50 viên ngọc sẽ giảm đi 50 lần so với số hoán vị thẳng.

Vậy số hoán vị tròn của 50 viên ngọc sẽ là: $\frac{50!}{50}$

Mặt khác, mỗi hoán vị tròn được xác định ở trên ta có thể lật ngược lại sợi dây chuyền để nhận được một hoán vị tròn khác, do đó cứ 2 hoán vị tròn tương ứng chỉ được tính một lần xâu.

Kết luận: vậy có $\frac{50!}{2.50}$ cách xâu 50 viên ngọc có màu sắc khác nhau thành vòng đeo cổ.

Câu 6: *(3 điểm)*

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{3}(\cos 2A - \cos 2C) + \cos 2B \le \frac{5}{2}$$

Đáp án

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và đặt OA = OB = OC = R

Ta luôn có bất đẳng thức:

$$(\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} - \alpha\overrightarrow{OC})^2 \ge 0 \text{ với } \alpha; \beta \in R^+$$

(do cos2A và cos2C có hệ số đối nhau)

$$\Leftrightarrow \alpha^2R^2 + \beta^2R^2 + \alpha^2R^2 + 2\alpha\beta\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} - 2\alpha^2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} -$$

$$- 2\alpha\beta\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow R^2(2z^2 + \beta^2) \ge 2R^2\alpha\beta\cos 2A - 2\alpha\beta R^2\cos 2C + 2R^2\alpha^2\cos 2B$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + \beta^2 \ge 2\alpha\beta(\cos 2A - \cos 2C) + 2\alpha^2\cos 2B$$

Chọn $\alpha; \beta \in R^+$ thỏa:

$$\begin{cases} 2\alpha\beta = \sqrt{3} \\ 2\alpha^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ Khi đó: } 2\alpha^2 + \beta^2 = \frac{5}{2}$$

Vậy $\sqrt{3}(\cos 2A - \cos 2C) + \cos 2B \le \dfrac{5}{2}$ (đpcm).

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT PHAN CHÂU TRINH – ĐÀ NẴNG

Câu 1: Giải bất phương trình:

$$x^2 + \frac{2}{\sqrt{-x^2+6x-5}} > 2x.$$

Đáp án

ĐK: $1 < x < 5$

Ta có: $0 < \sqrt{-x^2+6x-5} \le 2$ (Bất đẳng thức Cauchy)

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{-x^2+6x-5}} \ge 1$$

Vậy BPT $\Leftrightarrow x^2 + 1 + \frac{2}{\sqrt{-x^2+6x-5}} - 1 > 2x$.

Mặt khác $x^2 + 1 > 2x$ (với $x > 1$) và $\frac{2}{\sqrt{-x^2+6x-5}} - 1 \ge 0$

Kết luận: Nghiệm là: $1 < x < 5$

Câu 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1 \end{cases}.$$

Đáp án

Trừ hai vế ta có:

$$\left(x^2 - xy\right)^2 + \left(x^2 - xy\right) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - xy = 1;\ x^2 - xy = -2$$

Khi $xy = x^2 - 1$ thì: $x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ x = \pm 1$

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $(\pm 1; 0)$

Khi $xy = x^2 + 2$ thì $x^4 + 2x^2 + 3 = 0$ vô nghiệm.

Kết luận: Nghiệm của hệ là $(\pm 1; 0)$

Câu 3: Cho a, b, c > 0: abc = 1. Tìm GTLN của

$$P = \frac{1}{2a^3 + b^3 + c^3 + 2} + \frac{1}{a^3 + 2b^3 + c^3 + 2} + \frac{1}{a^3 + b^3 + 2c^3 + 2}$$

Đáp án

Ta có: $(a^3 + b^3 + 1 + a^3 + c^3 + 1)\left(\dfrac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \dfrac{1}{a^3 + c^3 + 1}\right) \geq 4$

$$\Rightarrow \frac{4}{2a^3 + b^3 + c^3 + 2} \leq \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{a^3 + c^3 + 1}$$

Tương tự: $\dfrac{4}{2a^3 + b^3 + c^3 + 2} \leq \dfrac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \dfrac{1}{b^3 + c^3 + 1}$

$$\frac{4}{a^3 + b^3 + 2c^3 + 2} \leq \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{a^3 + c^3 + 1}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{a^3 + c^3 + 1}$$

Mặt khác:

+ Ta có: $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + 1 \geq ab(a + b) + abc$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + 1 \geq ab(a + b + c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} \leq \frac{1}{ab(a + b + c)}$$

Tương tự: $\dfrac{1}{b^3 + c^3 + 1} \leq \dfrac{1}{bc(a + b + c)}$

$$\frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq \frac{1}{ca(a + b + c)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} \leq \frac{1}{bc(a + b + c)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1$$

Suy ra $P \leq \dfrac{1}{2}$

– Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$

Vậy $\mathrm{Max}P = \dfrac{1}{2}$.

Câu 4:

Cho ΔABC không cân tại A. Gọi AH, AM, AD lần lượt là đường cao, đường trung tuyến và đường phân giác trong của tam giác ABC đi qua đỉnh A của nó. Chứng minh rằng biểu thức: 2cosA + cos(B − C) không đổi khi D là trung điểm của đoạn thẳng MH.

Đáp án

- Gọi A' là giao điểm của AD với đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có

$$\frac{AD}{CD} = \frac{DB}{DA'}$$

$$DH = DM$$

- Ta có $DA = DA' \Leftrightarrow \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{DB}{DA} \Leftrightarrow \dfrac{\sin C}{\sin\dfrac{A}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{A}{2}}{\sin B}$

$$\Leftrightarrow \sin B \sin C = \sin^2\frac{A}{2}$$

$$-\cos(B + C) + \cos(B - C) = 1 - \cos A$$

$$\Leftrightarrow 2\cos A + \cos(B - C) = 1 \text{ không đổi.}$$

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN LỚP 10

TRƯỜNG THPT QUỐC HỌC HUẾ – TỈNH THỪA THIÊN HUẾ

Câu 1:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left|y + \dfrac{1}{x}\right| + \left|\dfrac{13}{16} + x - y\right| = x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{13}{16} \\ x^2 + y^2 = \dfrac{97}{36} \\ x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Đáp án

Áp dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối ta có hệ

$$\begin{cases} y + \dfrac{1}{x} \geq 0, \dfrac{13}{6} + x - y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = \dfrac{97}{36} \\ x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Từ $\begin{cases} y + \dfrac{1}{x} \geq 0, \dfrac{13}{6} + x - y \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$ suy ra $6x^2 + 13x + 6 \leq 0$.

Từ $0 < y \leq 13/6 + x$ suy ra $x^2 + y^2 \leq x^2 + (13/6 + x)^2$

Do đó $97/36 \leq x^2 + (13/6 + x)^2$ hay $6x^2 + 13x + 6 \geq 0$.

Vậy $6x^2 + 13x + 6 = 0$.

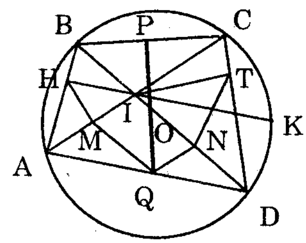
Do đó $x = -3/2$ hoặc $x = -2/3$.

Tóm lại $(x = -3/2, y = 2/3)$, $(x = -2/3, y = 3/2)$. Thử lại thoả mãn hệ.

Câu 2:

Cho đường tròn (O). AB là dây cung không phải là đường kính. H là điểm trong đoạn AB. Đường thẳng qua H vuông góc với AB cắt cung lớn AB tại K. I thuộc đoạn HK. IA cắt lại (O) tại C. IB cắt lại (O) tại D (C khác D). Gọi d là đường thẳng đi qua trung điểm AD và BC. Chứng minh rằng đường thẳng đối xứng của CD qua d đi qua một điểm cố định khi I thay đổi.

Đáp án



Kí hiệu như hình vẽ. T là hình chiếu của I trên CD; M, N là trung điểm IA, ID; P, Q là trung điểm của BC, AD.

+ MQ = IN = TN, QN = IM = HM và góc (HMQ) = góc (TNQ) (Vì góc (HMI) = 2 góc (BAC) và góc (TNI) = 2 góc (BDC)).

Do đó QH = QT. Tương tự PH = PT.

Vậy T và H đối xứng nhau qua d.

Kết luận: Khi I di động thì ảnh đối xứng của DC qua d luôn qua điểm cố định H.

Câu 3:

Xét a, b, c > 0 tùy ý. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$T = \frac{\sqrt{abc}}{(1+a)(1+a+b)(1+a+b+c)}$$

Đáp án

Đặt $u = \dfrac{a}{1+a}, v = \dfrac{b}{(1+a)(1+a+b)}$

$$w = \frac{c}{(1+a+b)(1+a+b+c)}, s = \frac{1}{1+a+b+c}.$$

Ta có u + v + w + s = 1 và $T^2 = uvws$.

Từ bất đẳng thức Côsi, ta có $T \le 1/16$. Dấu bằng có được khi:

$$\frac{a}{1+a} = \frac{b}{(1+a)(1+a+b)} = \frac{c}{(1+a+b)(1+a+b+c)} = \frac{1}{1+a+b+c} = \frac{1}{4}.$$

Giải hệ ta có a = 1/3, b = 2/3, c = 2.

Vậy giá trị lớn nhất của T là 1/16.

Câu 4:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) tâm O bán kính R, $A = 30^0$, $\hat{C} < 90^0$. Tổng khoảng cách từ O đến AB, AC là 2 và $AB + AC = 2 + \sqrt{3}$. Tính R.

Đáp án

Xét 3 trường hợp:

1) $\hat{B} = 90^0$: Lúc đó O là trung điểm của AC nên

$$BC = 4 > AB + AC = 2 + \sqrt{3}. \text{ Vô lý.}$$

2) $\hat{B} < 90^0$: Ta có $AB + AC = 2 + \sqrt{3}$.

Suy ra $2R(\cos x + \cos(30^0 - x)) = 2 + \sqrt{3}$, $R(\sin x + \sin(30^0 - x)) = 2$.

Hay $4R(\cos 15^0 \cos(x - 15^0) = 2 + \sqrt{3}$, $R(\sin 15^0 \cos(x - 15^0) = 1$.

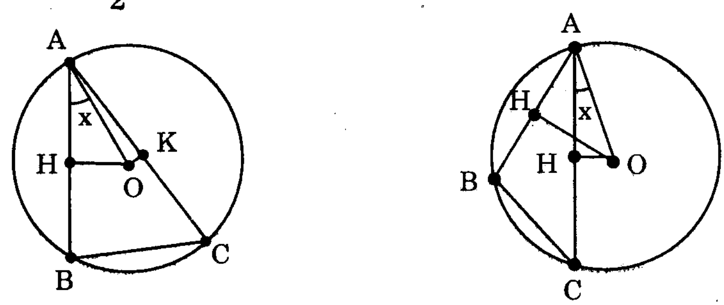
Suy ra $\tan 15^0 = 4/(2 + \sqrt{3}) > 1$. Vô lý.

3) $\hat{B} > 90^0$: $2R(\cos x + \cos(30^0 + x)) = 2 + \sqrt{3}$, $R(\sin x + \sin(30^0 + x)) = 2$.

Hay $4R(\cos 15^0 \cos(x + 15^0) = 2 + \sqrt{3}$, $R(\sin(x + 15^0)\cos 150^0) = 1$.

Suy ra $R^2 = \dfrac{1 + (\frac{2+\sqrt{3}}{4})^2}{\cos^2 15^0} = \dfrac{23 + 4\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})} \Rightarrow R = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{23 + 4\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$.

Vậy $R = \dfrac{\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}}{2}$.



Câu 5:

Trong mặt phẳng cho T là tập hợp hữu hạn điểm. Giữa hai điểm nào đó của T có nối nhau bởi cung tròn có hai mút là hai điểm đó. Một cung như vậy ta gọi là một cạnh. Kí hiệu s(A) là số cạnh có được có hai điểm mút thuộc tập A. Biết rằng với mọi tập con A khác rỗng của T thì $s(A) \leq 2|A| - 2$. Cho A_i với $i = 1, 2, \ldots, k$ ($k > 1$) là các tập con khác rỗng của T đôi một giao nhau khác rỗng.

Nếu $s(A_i) = 2|A_i| - 2$ với $i = 1, 2, \ldots, k$.

Chứng minh rằng $s(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = 2|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| - 2$.

Đáp án

Quy nạp:

+ Nếu $k = 2$, gọi A, B là hai tập và a, b, c lần lượt là số phần tử của A, B, $A \cap B$ thì $|A \cup B| = a + b - c$.
+ Giả sử $s(A \cup B) < 2(a + b - c) - 2$. Suy ra số cạnh hai đầu mút trong $A \cup B$ nhưng không đồng thời thuộc A nhỏ hơn

$$2(a + b - c) - 2 - s(A) = 2(a + b - c) - 2 - (2a - 2) = 2(b - c).$$

+ Một cạnh có hai mút trong B thì hoặc hai mút thuộc B\A hoặc hai mút thuộc $A \cap B$ hoặc hai mút thuộc hai tập B\A, $A \cap B$.

Do đó số cạnh có hai mút thuộc B\A hoặc hai mút thuộc hai tập B\A, $A \cap B$ nhỏ hơn $2(b - c)$.

Suy ra $s(A \cap B) > s(B) - 2(b - c) = 2b - 2 - 2b + 2c = 2c - 2$ (mâu thuẫn).

+ Nếu $s(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 2|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| - 2$ và $s(A_{n+1}) = 2|A_{n+1}| - 2$ thì từ giả thiết $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ nên từ trường hợp k = 2 ta có

$$s(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = 2|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i| - 2.$$

Câu 6:

Chứng minh rằng phương trình $2^x + 3^x = yx^2$ có vô hạn nghiệm nguyên dương x, y.

Đáp án

Nhận xét: Nếu x, y nguyên dương, m là số nguyên dương lẻ và x + y chia hết cho m thì $x^m + y^m$ chia hết cho $m(x + y)$. Thật vậy

$$x^m + y^m = (x + y)\sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l x^{m-1-l}y^l$$

$$\sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l x^{m-1-l}y^l = my^{m-1} + x^{m-1} - y^{m-1} - (x^{m-1} + y^{m-1})y$$

$$+(x^{m-3} - y^{m-3})y^2 - \cdots - (x^2 - y^2)y^{m-3} - (x + y)y^{m-2}$$

Do đó $x^m + y^m$ chia hết cho $m(x + y)$.

Xét dãy $u_1 = 1$, $u_{k+1} = \dfrac{2^{u_k} + 3^{u_k}}{u_k}$. Bằng quy nạp ta chứng minh $\dfrac{2^{u_k} + 3^{u_k}}{u_k^2} \in \mathbb{N}$ và dãy là tăng.

+ k = 1: hiển nhiên.

+ Giả sử $\dfrac{2^{u_k} + 3^{u_k}}{u_k^2} \in \mathbb{N}$ và $\dfrac{2^{u_k} + 3^{u_k}}{u_k^2} > 1$. Suy ra $2^{u_k} + 3^{u_k} = lu_k^2$, l lẻ và $l > 1$.

Theo nhận xét trên $(2^{u_k})^l + (3^{u_k})^l \vdots l(2^{u_k} + 3^{u_k})$ với $l = \dfrac{2^{u_k} + 3^{u_k}}{u_k^2}$ thì

$$\frac{2^{u_{k+1}} + 3^{u_{k+1}}}{{u_{k+1}}^2} > 1, \quad \frac{2^{u_{k+1}} + 3^{u_{k+1}}}{{u_{k+1}}^2} \in \mathbb{N}.$$

Kết luận: Phương trình có vô số nghiệm nguyên dương x, y.

Câu 7:

Cho tam giác ABC, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng

$$BC^2 \le AB^2 + CA^2 + R^2 \qquad (1).$$

Đáp án

Bất đẳng thức (1) tương đương với

$$4R^2\sin^2A \le 4R^2\sin^2B + 4R^2\sin^2C + R^2$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2A \le 4\sin^2B + 4\sin^2C + 1$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - \cos^2A) \le 2(1 - \cos2B) + 2(1 - \cos2C) + 1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2A - 2(\cos2B + \cos2C) + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2A + 4\cos A\cos(B - C) + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos A + \cos(B - C))^2 + \sin^2(B - C) \ge 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin(B - C) = 0$ và $2\cos A + \cos(B - C) = 0$.

Do đó $B = C$ và $\cos A = -\dfrac{1}{2}$ hay tam giác ABC cân tại A và $\widehat{A} = 120^0$.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN THĂNG LONG – ĐÀ LẠT

Câu 1: *(4 điểm)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y - z = 7 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 37 \\ x^3 + y^3 - z^3 = 1 \end{cases}$

Đáp án

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$ điều kiện: $u^2 - 4uv \geq 0$.

Hệ trở thành $\begin{cases} u - z = 7 & (1) \\ u^2 - 2v - z^2 = 37 & (2) \\ u^3 - 3uv - z^3 = 1 & (3) \end{cases}$

Từ (1) suy ra: $z = u - 7$. Thay vào (2) được: $v = 7u - 43$

Thay z và v vào (3) được: $18u = 342 \Rightarrow u = 19$

Do đó: $v = 90$, $z = 12$

Với $\begin{cases} u = 19 \\ v = 20 \end{cases}$ tìm được $\begin{cases} x = 9 \\ y = 10 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \end{cases}$

Vậy hệ có 2 nghiệm (9; 10; 12), (10; 9; 12).

Câu 2: *(4 điểm)*

Cho số thực $a \neq 0$. Chứng minh:

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{a^2 + \ldots + \sqrt{a^2}}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\left(\sqrt{1 + 16a^2} + \sqrt{9 + 16a^2}\right)$$

(n dấu căn)

Đáp án

Đặt $x_n = \sqrt{a^2 + \sqrt{a^2 + \ldots + \sqrt{a^2}}}$ (n dấu căn)

$\Rightarrow x_n^2 = a^2 + x_{n-1}$.

Chứng minh (x_n) là dãy tăng bằng quy nạp. Do đó:

$$x_n^2 < a^2 + x_n \Leftrightarrow x_n^2 - x_n - a^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 + 4a^2}\right) < x_n < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a^2})$$

$$\Rightarrow x_n < \frac{1}{2} + \sqrt{1+4a^2} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2} \le \sqrt{a_1^2+b_1^2} + \sqrt{a_2^2+b_2^2} \qquad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in R)$$

Ta có: $\sqrt{1+4a^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^2 + (a+a)^2}$

$$\le \sqrt{\frac{1}{16}+a^2} + \sqrt{\frac{9}{16}+a^2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+16a^2} + \sqrt{9+16a^2}\right) \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 3:

Cho a, b, c là các số thực không âm thoả điều kiện a + b + c = 3.

Chứng minh: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \ge ab + bc + ca$.

Đáp án

Ta có: $2(ab + bc + ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$

Ta chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \ge 9$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân:

$$a^2 + \sqrt{a} + \sqrt{a} \ge 3a$$
$$b^2 + \sqrt{b} + \sqrt{b} \ge 3b$$
$$c^2 + \sqrt{c} + \sqrt{c} \ge 3c$$

Vậy: $a^2 + b^2 + c^2 + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \ge 3(a+b+c) = 9$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c =1

Câu 4: *(4 điểm)*

Xác định đa thức P(x) có bậc nhỏ nhất, với các hệ số nguyên không âm nhỏ nhất, sao cho với mỗi số nguyên dương $n4^n + P(n)$ chia hết cho 27.

Đáp án

Tất cả đồng dư thức ≡ sau đây đều theo mod 27.

Ta có: $4^n = (1+3)^n = 1 + C_n^1 3 + C_n^2 3^2 + ... + C_n^n 3^n \equiv 1 + 3n + \frac{9n(n-1)}{2}$

Nên từ: $4^n + P(n) \equiv 0$ suy ra:

$$P(n) \equiv -1 - 3n - \frac{9n(n-1)}{2} \equiv 28\left(-1 - 3n - \frac{9n(n-1)}{2}\right)$$

$\equiv -126n^2 + 42n - 28 \equiv 9n^2 + 15n + 26$

$\equiv 9n^2 + 15n + 26$

Vậy đa thức phải tìm là:

$P(x) = 9x^2 + 15x + 26$

Câu 5: *(4 điểm)*

Cho tam giác ABC, vẽ các trung tuyến AM, BN, CP và các phân giác AD, BE, CF. Các điểm X, Y, Z thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $\angle MAD = \angle XAD$; $\angle NBE = \angle YBE$; $\angle PCF = \angle ZCF$.

Chứng minh: AX, BY, CZ đồng quy.

Đáp án

Lấy C_1, B_1 tương ứng thuộc AB, AC sao cho

$AC_1 = AC$, $AB_1 = AB$.

Dễ thấy $D \in B_1C_1$.

Gọi $M_1 = AX \cap B_1C_1$, dễ thấy M_1 là trung điểm của B_1C_1

Ta có: $\overrightarrow{AM_1} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{AB_1}) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{b}{c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{b}\overrightarrow{AC})$ (1)

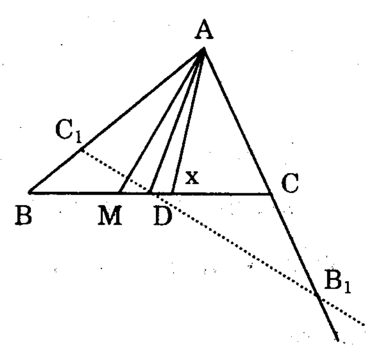
Nhờ phép chiếu phương AM_1 lên đường thẳng BC

Ta có: $\vec{0} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{b}{c}\overrightarrow{XB} + \dfrac{c}{b}\overrightarrow{XC}) \Rightarrow b^2\overrightarrow{XB} + c^2\overrightarrow{XC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = -\dfrac{c^2}{b^2}$.

Tương tự: $\dfrac{\overline{YC}}{\overline{YA}} = -\dfrac{a^2}{c^2}$; $\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = -\dfrac{b^2}{a^2}$

Do đó, theo định lí CéVa: AX, BY, CZ đồng quy.



ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 1: *(3 điểm)*

Giải phương trình $\dfrac{x}{\sqrt{2007}} + \dfrac{2008\sqrt{2007}}{x} - \sqrt{2008 - x^2} = 2008$

Đáp án

Dễ thấy rằng phương trình không có nghiệm âm hoặc nghiệm 0 và ta giả sử a là một nghiệm dương của nó.

$$\frac{a}{\sqrt{2007}} + \frac{2008\sqrt{2007}}{a} - \sqrt{2008 - a^2}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2007}} + \frac{\sqrt{2007}}{a} + \frac{2007^2}{a\sqrt{2007}} - 1.\sqrt{2008 - a^2}$$

Ta có $\dfrac{a}{\sqrt{2007}} + \dfrac{\sqrt{2007}}{a} \geq 2$

Và $\dfrac{2007^2}{a\sqrt{2007}} - 1.\sqrt{2008 - a^2} \geq \dfrac{2007^2}{\dfrac{a^2 + 2007}{2}} - \dfrac{2009 - a^2}{2}$

$$= \frac{2007^2.2}{a^2 + 2007} + \frac{a^2 + 2007}{2} - 2008 \geq 2.2007 - 2008 = 2006$$

Suy ra $a = \sqrt{2007}$ (thỏa phương trình đã cho). Vậy nghiệm của phương trình là $x = \sqrt{2007}$

Câu 2: *(4 điểm)*

Tìm tất cả các số nguyên tố p mà với nó luôn tồn tại các số nguyên dương x, y và n sao cho $p^n = x^3 + y^3$.

Đáp án

Ta có $2^1 = 1^3 + 1^3$ và $3^2 = 1^3 + 2^3$ như vậy ta nhận p = 2 và p = 3.

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng p chỉ có thể nhận hai giá trị này mà thôi.

Giả sử với số nguyên tố p > 3 luôn có các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn $p^n = x^3 + y^3$ (*).

Ở đây ta có thể giả sử bộ (n, x, y) thỏa (*) là bộ có số n nhỏ nhất.

Ta có $p^n = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên x khác y, từ đó $x + y \geq 3$ và $x^2 - xy + y^2 = (x - y)^2 + xy \geq 3$

$\Rightarrow x + y$ và $x^2 - xy + y^2$ đều chia hết cho p.

Từ $(x + y)^2 - (x^2 - xy + y^2) = 3xy$ ta suy ra $3xy \vdots p$

$\Rightarrow x \vdots p$ hoặc $y \vdots p$ (vì 3 không chia hết cho p)

$\Rightarrow$ Cả x và y đều chia hết p $\Rightarrow p^n > 2p^3 \Rightarrow n > 3$

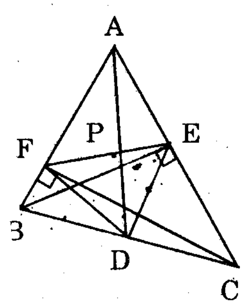
$$\Rightarrow p^{n-3} = \frac{p^n}{p^3} = \left(\frac{x}{p}\right)^3 + \left(\frac{y}{p}\right)^3$$

Như vậy bộ (n −3, x/p, y/p) cũng thỏa (*) mâu thuẫn với giả thiết n là số nhỏ nhất.

Câu 3: *(3 điểm)*

Cho ΔABC có trung tuyến AD và 2 đường cao BE, CF. Gọi P là giao điểm của AD và EF. Chứng minh rằng nếu $AD = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$ thì P là trung điểm của AD.

Đáp án



Ta có $b^2 + c^2 = 2AD^2 + \frac{a^2}{2} = 2a^2$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2}{2bc}$$

Ta có $S_{AEF} = S_{ABC}\cos^2 A = \frac{1}{2}bc\sin A.\frac{a^2}{2bc}.\cos A$

$$= \frac{a^2 \sin 2A}{8}$$

$$S_{DEF} = \frac{1}{2}DE.DF.\sin\widehat{EDF} = \frac{a^2\sin 2(90^0 - A)}{8} = \frac{a^2 \sin 2A}{8}$$

$\Rightarrow S_{AEF} = S_{DEF} \Rightarrow$ P là trung điểm của AD.

Câu 4: *(4 điểm)*

Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a} + \frac{c+a}{c+b}$$

Đáp án

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{ab+bc+ca} \geq \frac{b-c}{a+c} + \frac{c-a}{b+a} + \frac{a-b}{c+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2(ab+bc+ca)} \ge \frac{b-c}{a+c}+\frac{c-a}{b+a}+\frac{a-b}{c+b}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\left[\frac{a-b}{2(ab+bc+ca)}-\frac{1}{c+b}\right]$$

$$+(b-c)\left[\frac{b-c}{2(ab+bc+ca)}-\frac{1}{a+c}\right]$$

$$+(c-a)\left[\frac{c-a}{2(ab+bc+ca)}-\frac{1}{b+a}\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\left[-b-a-\frac{2bc}{b+c}\right]+(b-c)\left[-c-b-\frac{2ac}{a+c}\right]$$

$$+(c-a)\left[-a-c-\frac{2ab}{a+b}\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\left[-b-a-\frac{2bc}{b+c}\right]-(a-b)\left[-c-b-\frac{2ac}{a+c}\right]$$

$$+(a-c)\left[-c-b-\frac{2ac}{a+c}\right]-(a-c)\left[-a-c-\frac{2ab}{a+b}\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\left[c-a+\frac{2c^2(a-b)}{(b+c)(a+c)}\right]+(a-c)\left[a-b+\frac{2a^2(b-c)}{(a+c)(a+b)}\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2c^2(a-b)^2}{(b+c)(a+c)}+\frac{2a^2(a-c)(b-c)}{(a+c)(a+b)} \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng khi ta chọn c là số nhỏ nhất.

Câu 5: *(3 điểm)*

Cho 9 số thực bất kì. Chứng minh rằng giữa chúng có thể chọn được 2 số, chẳng hạn x và y sao cho $1 \le \frac{1+x-y+xy}{1+xy} \le \sqrt{2}$

Đáp án

Các số đã cho kí hiệu là $x_1; x_2; \dots; x_9$.

Biểu diễn mọi số dưới dạng $x_i = \tan\alpha_i$, ở đây α_i là một số trong khoảng $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}), i = 1, 2 \dots 9$. Chúng ta chia đoạn này ra thành 8 đoạn nhỏ có độ dài bằng nhau, nghĩa là có độ dài $\frac{\pi}{8}$.

Dễ dàng thấy rằng ít nhất có hai số trong $\alpha_1, \dots \alpha_9$ cùng nằm trong một đoạn con nào đó. Nếu chúng ta kí hiệu các số đó là α_i và α_j thì từ đó suy ra $0 \le \alpha_i - \alpha_j \le \frac{\pi}{8}$.

Vì hàm số tăng là tăng trong khoảng $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ suy ra

$$0 \le \tan(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{\tan\alpha_i - \tan\alpha_j}{1+\tan\alpha_i\tan\alpha_j} = \frac{x_i - x_j}{1+x_ix_j} \le \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow 1 \le \frac{1+x_i - x_j + x_ix_j}{1+x_ix_j} \le \sqrt{2}.$$

Câu 6: *(3 điểm)*

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho ba đường thẳng:

d_1: $3x - y - 4 = 0$; d_2: $x + y - 6 = 0$; d_3: $x + 3y - 3 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết rằng A và C thuộc d_3, B thuộc d_1, D thuộc d_2.

Đáp án

$B \in d_1 \Rightarrow B(b; 3b - 4)$

$D \in d_2 \Rightarrow D(d; 6 - d)$

Suy ra $\overline{DB} = (b - d; 3b + d - 10)$ và tọa độ tâm I của hình vuông là

$$I(\frac{b+d}{2};\frac{3b-d+2}{2})$$

Do $DB \perp d_3$ và $I \in d_3$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 5b + 3d = 20 \\ 5b - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ d = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow B(1; -1)$, $D(5; 1)$ và $I(3; 0)$

Tọa độ A và C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6-3\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{6+3\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Vậy tọa độ của A và C là

$$A\left(\frac{6-3\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right);C\left(\frac{6+3\sqrt{2}}{2};\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$$

hoặc $A\left(\frac{6+3\sqrt{2}}{2};\frac{-\sqrt{2}}{2}\right);C\left(\frac{6-3\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – TP. HỒ CHÍ MINH

Câu 1: *(3 điểm)*

Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2m\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = m^3.$$

Đáp án

Ta thấy: Nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $(1 - x_0)$ cũng là nghiệm của (1).

Do đó, (1) có nghiệm duy nhất thì ta được:

$$x_0 = 1 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$$ *0,5đ*

Với $x_0 = \frac{1}{2}$; thay vào (1) $\Rightarrow 2\sqrt{\frac{1}{2}} + m - 2\sqrt[4]{\frac{1}{2^2}} = m^3$.

$\Leftrightarrow m = m^3 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = 1 \vee m = -1.$ *0,5đ*

Kiểm tra điều kiện đủ:

* $m = 0$; (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ *0,5đ*

* $m = 1$; (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = 1$

Phương trình này có ít nhất 2 nghiệm: $x = 0$; $x = 1$ *0,5đ*

* $m = -1$; (1) $\Leftrightarrow (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x})^2 + \left(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1} - x = 0 \\ \sqrt{x} - \sqrt{1-x} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$ *0,5đ*

Kết luận: $m = 0 \vee m = -1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. *0,5đ*

Câu 2: *(4 điểm)*

Cho n là số nguyên dương. Biết rằng $(2n + 1)$ và $(3n + 1)$ là hai số chính phương, hãy chứng minh n chia hết cho 40.

Đáp án

* Ta có $2n + 1 = m^2$, mà $2n + 1$ là một số lẻ, vậy m lẻ: $m = 2k + 1$, suy ra

$2n + 1 = (2k + 1)^2 \Rightarrow n = 2k(k + 1)$ Vậy n chẵn. *0,5đ*

* Đồng thời $3n + 1 = p^2$, mà n chẵn, vậy p lẻ: $p = 2t + 1$, suy ra

$3n + 1 = (2t + 1)^2 \Rightarrow 3n = 4t(t + 1)$

Từ đây suy ra n chia hết cho 8 *1đ*

* Ta có: $5n = 2n + 3n = 4[k(k + 1) + t(t + 1)]$ (1)

$\Rightarrow k(k + 1) + t(t + 1)$ chia hết cho 5 *0,5đ*

* Thật vậy để ý rằng nếu u và v đều không chia hết cho 5 thì:

$u(u + 1) \equiv 1$ hoặc 3 (mod 5)

$v(v + 1) \equiv 1$ hoặc 2 (mod 5)

$\Rightarrow u(u + 1) + v(v + 1) \equiv 0 \pmod 5$ *1đ*

* Do vậy từ $k(k + 1) + t(t + 1)$ chia hết cho 5 $\Rightarrow$ k và t đều chia hết cho 5

$\Rightarrow$ n chia hết cho 5 *0,5đ*

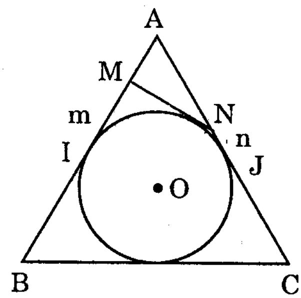
* Vì n chia hết cho 8 và 5, nên n chia hết cho 40 *0,5đ*

Câu 3: *(3 điểm)*

Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (O) trên AB và AC lấy hai điểm M, N sao cho MN luôn tiếp xúc với đường tròn (O).

Chứng minh: $\dfrac{AM}{MB} + \dfrac{AN}{NC} = 1$

Đáp án



Đặt AB = 2a, IM = m, JM = n.

Ta có:

$$\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1 \Leftrightarrow \frac{a-m}{a+m} + \frac{a-n}{a+n} = 1 \quad 1đ$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a^2 - 2mm}{a^2 + m + n + mn} = 1$$

$\Leftrightarrow a^2 = m + n + 3mn$ *0,5đ*

ΔAMN cho: $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.\ AN.\cos 60^0$ *0,5đ*

$\Leftrightarrow (m + n)^2 = (a - m)^2 + (a - n)^2 - (a - m).(a - n)$

$\Leftrightarrow a^2 = m + n + 3mn$

Vậy: Bài toán đã được chứng minh *1đ*

Câu 4: *(4 điểm)*

Cho x, y, z là ba số thực không âm thoả mãn điều kiện: $x + y + z = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = yz + zx + xy - 2xyz$$

Đáp án

* Ta có: $P = xy(1 - z) + xz(1 - y) + yz > 0$

(Do giả thiết $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ nên $1 - z > 0$ và $1 - y > 0$) *1đ*

Dấu đẳng thức xảy ra khi trong ba số x, y, z có hai số bằng 0 và một số bằng 1

Vậy Min P = 0 *0,5đ*

* Ta có $(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z)$

$$= 1 - 2(x + y + z) + 4(yz + zx + xy) - 8xyz$$

mà $x + y + z = 1 \Rightarrow (1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z)$

$$= -1 + 4(yz + zx + xy) - 8xyz$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{4}[1 + (1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z)]$$ *1đ*

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc cho ba số x, y, z không âm ta có:

$$(y + z - x)(z + x - y)(x + y - z) < xyz$$

$$\Rightarrow (1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) < xyz < \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow P < \frac{1}{4}\left[1 + \frac{1}{27}\right] = \frac{7}{27}$$ *1đ*

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = y = z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$

Vậy Max $P = \frac{7}{27}$ *0,5đ*

Câu 5: *(3 điểm)*

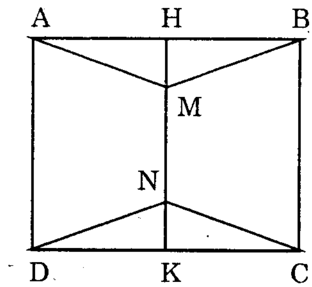
Có 5 điểm nằm trong một hình vuông cạnh a = 36,7 (đơn vị độ dài). Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm nằm trong hình vuông hoặc trên cạnh hình vuông mà khoảng cách từ điểm đó đến 5 điểm nói trên đều lớn hơn 10.

Đáp án

Giả sử hình vuông đã cho là ABCD, gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Lấy M, N trên đoạn HK sao cho: HM = KN = 8, khi đó MN = 20,7 và MA = MB = ND = NC =

$$= \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{400,7225} > 20$$ *1đ*

$\Rightarrow$ Trong 6 điểm A, B, C, D, M, N thì khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ đều lớn hơn 20.
Xét 6 đường tròn tâm A, B, C, D, M, N có bán kính R = 10. Dễ thấy các đường tròn này ngoài nhau nên chúng không có điểm chung. *1đ*
Vì trong hình vuông chỉ có 5 điểm đã cho nên sẽ tồn tại một đường tròn không chứa điểm nào trong 5 điểm đó.
Gọi O là tâm của đường tròn này, khi đó điểm O thoả mãn yêu cầu đề bài. *1đ*



Câu 6: *(3 điểm)*

Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Cho 2 đường thẳng

$(d_1): x - 2y - 2 = 0$

$(d_2): 2x + 3y - 11 = 0.$

Đường thẳng (d) đi qua giao điểm của (d_1) và (d_2) cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại A và B.Viết phương trình đường thẳng (d) sao cho:

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \text{ nhỏ nhất.}$$

Đáp án

Giả sử A (a; 0) và (0; b) với a, b > 0 thì (d) có phương trình: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng (d_1), (d_2) thì M (4; 1).

Vì điểm M $\in$ (d) $\quad \Rightarrow \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1 \qquad (1)$ *1đ*

Ta có: $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski ta có:

$$(4^2 + 1^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) > \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{17}$$ *1đ*

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1 \\ 4a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{17}{4} \\ b = 17 \end{cases}$

Vậy Min $\left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}\right) = \frac{1}{17}$. Khi đó đường thẳng (d) có phương trình là: $4x + y - 17 = 0$ *1đ*

Phần II

TOÁN 11

ĐỀ THI CHÍNH THỨC OLYMPIC TOÁN 11 TRUYỀN THỐNG 30/4 LẦN XIV – NĂM 2008

Bài 1: *(4 điểm)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^x - 2 = 3y - 3^x \\ 3^y - 2 = 3x - 2^y \end{cases}$.

Đáp án

$$\text{(I)} \begin{cases} 2^x - 2 = 3y - 3^x & (1) \\ 3^y - 2 = 3x - 2^y & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $(2^x - 2^y) + (3^x - 3^y) = 3(y - x)$ (3) *(0,5 đ)*

Nếu $x > y$ thì (3) không xảy ra.

Nếu $x < y$ thì (3) cũng không xảy ra.

Do $x = y$ thỏa (3) nên hệ phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} y = x \\ 2^x + 3^x - 3x - 2 = 0 \quad (4) \end{cases}$$ *(1 đ)*

Xét hàm số $f(x) = 2^x + 3^x - 3x - 2;\quad x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 - 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -3$, nên $f'(x) = 0$ có đúng một nghiệm x_0.

(1 đ)

Suy ra bảng biến thiên của f(x) như sau:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	
f(x)	↘			↗	

Suy ra rằng f(x) = 0 có nhiều nhất là 2 nghiệm. (1 đ)

Mà f(0) = f(1) = 0 nên x = 0 và x = 1 là 2 nghiệm của phương trình f(x) = 0.

Kết luận: Hệ đã cho có đúng 2 nghiệm là (0; 0) và (1; 1). *(0,5 đ)*

Bài 2: *(4 đ)*

Cho dãy (u_n) được xác định như sau:

$$(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})u_n = \frac{2}{2n+1};\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Chứng minh rằng $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{2008} < \dfrac{1004}{1005}$.

Đáp án

Ta có: $u_k = \dfrac{2}{(2k+1)(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} = \dfrac{2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{2k+1}$ *(0,5 đ)*

$$\Rightarrow u_k < \frac{2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{2\sqrt{k(k+1)}} \text{ do } \sqrt{k(k+1)} < \frac{k+(k+1)}{2} = \frac{2k+1}{2}$$

$$\Rightarrow u_k < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$ *(1,5 đ)*

Do đó: $u_1 + u_2 + u_3 + .. + u_k < \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$.

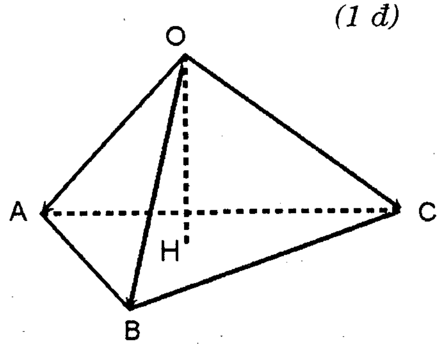
$$\Rightarrow u_1 + u_2 + u_3 + .. + u_k < 1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$ *(1,5 đ)*

Vì $1 - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{4k+4}} < 1 - \dfrac{2}{\sqrt{k^2+4k+4}} = 1 - \dfrac{2}{k+2} = \dfrac{k}{k+2}$

Như vậy ta đi đến: $u_1 + u_2 + u_3 + .. + u_k < \dfrac{k}{k+2}$. Với $k = 2008$ ta có điều phải chứng minh. *(1 đ)*

Bài 3: *(4 đ)*

Cho hình chóp OABC có góc tam diện đỉnh O là tam diện vuông. M là điểm thuộc miền tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{AM^2}{AO^2} + \dfrac{BM^2}{BO^2} + \dfrac{CM^2}{CO^2}$.



Đáp án

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ là các vectơ cơ sở,

$$OA = a; OB = b; OC = c.$$

Ta có $\overrightarrow{OM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ với $x + y + z = 1;\ \ x, y, z \geq 0$.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = (x-1)\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$ *(0,5 đ)*

Suy ra $AM^2 = (x-1)^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2$

Do đó $\dfrac{AM^2}{a^2} = (x-1)^2 + y^2\dfrac{b^2}{a^2} + z^2\dfrac{c^2}{a^2}$

Tương tự

$$\frac{BM^2}{b^2} = x^2\frac{a^2}{b^2} + (y-1)^2 + z^2\frac{c^2}{b^2}; \frac{CM^2}{c^2} = x^2\frac{a^2}{c^2} + y^2\frac{b^2}{c^2} + (z-1)^2 \quad \textit{(1 đ)}$$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta có:

$$\frac{AM^2}{AO^2} + \frac{BM^2}{BO^2} + \frac{CM^2}{CO^2} = x^2a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + y^2b^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)$$

$$+ z^2c^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2\right)$$

$$-(x^2 + y^2 + z^2) + (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2\right) - 2(x+y+z) + 3 \quad \textit{(1 đ)}$$

Gọi OH là đường cao của tứ diện thì $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{OH^2}$ và

$$x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2 = OM^2$$

Do đó $\frac{AM^2}{AO^2} + \frac{BM^2}{BO^2} + \frac{CM^2}{CO^2} = \frac{OM^2}{OH^2} + 1 \geq 2$ *(1 đ)*

Dấu đẳng thức xảy ra khi OM = OH hay M≡H và giá trị nhỏ nhất cần tìm là 2. *(0,5 đ)*

Bài 4: *(4 điểm)*

Cho phương trình với n nguyên dương $x + 2x^2 + \ldots + nx^n = \frac{3}{4}$

Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, trên khoảng $(0; +\infty)$, phương trình trên có nghiệm duy nhất, kí hiệu là x_n.

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Tính giới hạn đó.

Đáp án

Xét hàm số $f_n(x) = x + 2x^2 + \ldots + nx^n - \frac{3}{4}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'_n(x) = 1 + 2^2x + \ldots + n^2x^{n-1}$ và $f'_n(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ nên hàm số $f_n(x)$ tăng trên $(0; +\infty)$ (1)

Mà $f_n(0) = -\frac{3}{4} < 0, f_n(1) > 0 \Rightarrow$ phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0; +\infty)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm x_n duy nhất trong khoảng $(0; +\infty)$ *(1 đ)*

Ta có $\quad 3f_n\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + 2.\frac{1}{3} + ... + n.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{9}{4}$

$$f_n\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 2.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + n\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{4}$$

Trừ vế theo vế

$$2f_n\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{n}{3^n} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{3^n} - \frac{3}{2} = -\frac{2n+3}{2.3^n} < 0$$

Do đó: $x_n > \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ *(1 đ)*

Áp dụng Lagrange, tồn tại $y_n \in \left(\frac{1}{3}; x_n\right)$ sao cho:

$$\frac{2n+3}{4.3^n} = \left|f_n(x_n) - f_n\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|x_n - \frac{1}{3}\right|.\left|f_n'(y_n)\right| > \left|x_n - \frac{1}{3}\right| \quad \text{vì} \quad f_n'(y_n) > 1$$

với $y_n > 0$. *(1 đ)*

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2n+3}{4.3^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$ *(1 đ)*

Bài 5: *(4 đ)*

Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập hợp các số nguyên Z và lấy giá trị trong tập số thực dương R^+ sao cho

$$f(m-1)f(m) + f(m)f(m+1) \neq 2f(m-1)f(m+1), \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Đáp án

Giả sử hàm số f thỏa

$$f(m-1)f(m) + f(m)f(m+1) \leq 2f(m-1)f(m+1), \ \forall m \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

$\Rightarrow \frac{1}{f(m+1)} + \frac{1}{f(m-1)} \leq \frac{2}{f(m)}, \forall m \in \mathbb{Z}.$ *(0.5 đ)*

$\Rightarrow \frac{1}{f(m+1)} - \frac{1}{f(m)} \leq \frac{1}{f(m)} - \frac{1}{f(m-1)}, \forall m \in \mathbb{Z}.$

Đặt $g(m) = \dfrac{1}{f(m)} - \dfrac{1}{f(m-1)}, \forall m \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $g(m + 1) \neq g(m), \forall m \in \mathbb{Z}$ (2) *(0,5 đ)*

Nếu f(m) không là hàm hằng thì tồn tại $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $g(k) \neq 0$. *(0,5 đ)*

➢ Xét trường hợp $g(k) < 0$:

Với p nguyên dương ta có

$$g(k+1) + g(k+2) + \ldots + g(k+p) =$$

$$= \left(\frac{1}{f(k+1)} - \frac{1}{f(k)}\right) + \left(\frac{1}{f(k+2)} - \frac{1}{f(k+1)}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{f(k+p)} - \frac{1}{f(k+p-1)}\right)$$

$$= -\frac{1}{f(k)} + \frac{1}{f(k+p)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(k+p)} = \frac{1}{f(k)} + g(k+1) + g(k+2) + \ldots + g(k+p)$$

$$\overset{(\text{do}(2))}{\leq} \frac{1}{f(k)} + pg(k)$$

Ta có $\dfrac{1}{f(k+p)} > 0$, ta sẽ chọn p nguyên dương sao cho $\dfrac{1}{f(k)} + pg(k) < 0$ (*)

để phát sinh mâu thuẫn.

Mà với $g(k) < 0$; (1) $\Leftrightarrow p > \dfrac{-1}{f(k)g(k)}$. Rõ ràng ta luôn chọn được số nguyên dương p thỏa (*).

Khi đó $0 < \dfrac{1}{f(k+p)} \leq \dfrac{1}{f(k)} + pg(k) < 0$, vô lý. *(1 đ)*

➢ Xét trường hợp $g(k) > 0$:

Với q nguyên dương ta có

$$g(k) + g(k-1) + \ldots + g(k-(q-1)) =$$

$$= \left(\frac{1}{f(k)} - \frac{1}{f(k-1)}\right) + \left(\frac{1}{f(k-1)} - \frac{1}{f(k-2)}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{f(k-q+1)} - \frac{1}{f(k-q)}\right)$$

$$= \frac{1}{f(k)} - \frac{1}{f(k-q)}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(k-q)} = -\frac{1}{f(k)} + g(k) + g(k-1) + \ldots + g(k-q+1)$$

$$\overset{(\text{do}\,(2))}{\geq} -\frac{1}{f(k)} + qg(k)$$

Ta có $\frac{-1}{f(k-q)} < 0$, ta sẽ chọn q nguyên dương sao cho

$$-\frac{1}{f(k)} + qg(k) > 0 \ (^{**})$$

để phát sinh mâu thuẫn.

Mà với g(k) > 0; (2) $\Leftrightarrow q > \frac{1}{f(k)g(k)}$. Rõ ràng ta luôn chọn được số nguyên dương q thỏa (**).

Khi đó $0 > \frac{-1}{f(k-q)} \geq -\frac{1}{f(k)} + qg(k) > 0$, vô lý. *(1 đ)*

Vậy f(m) phải là hàm hằng $\Rightarrow$ f(m) = C, $\forall$ **m** $\in \mathbb{Z}$ với C là số thực dương tùy ý.

Ngược lại: Nếu f(m) = C, $\forall$ m $\in \mathbb{Z}$ với C là số thực dương tùy ý thì (1) thỏa.

Vậy f(m) = C, $\forall$ m $\in \mathbb{Z}$ với C là số thực dương tùy ý là hàm số phải tìm. *(0,5 đ)*

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN LỚP 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 1: *(... điểm)*

Giải phương trình

$$2x\left(\frac{x}{1975^2}+1\right)+\frac{x^4}{1975^3}+1=\left(\frac{x^4}{1975^3}+\frac{2x^2}{1975^2}+x+\frac{1976}{1975}\right)2008^{x-\frac{1}{1975}}$$

$$+\left(x-\frac{1}{1975}\right)2008^{\frac{x^4}{1975^3}+\frac{2x^2}{1975^2}+x+\frac{1976}{1975}}$$

Đáp án

Đặt $a=\dfrac{1}{1975}$ ta được (1) trở thành

$$\left(a^3x^4+2a^2x^2+2x+1\right)=$$

$$\left(a^3x^4+2a^2x^2+x+a+1\right)2008^{x-a}+(x-a)2008^{a^3x^4+2a^2x^2+x+a+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(a^3x^4+2a^2x^2+x+a+1\right)=$$

$$\left(a^3x^4+2a^2x^2+x+a+1\right)2008^{x-a}+(x-a)2008^{a^3x^4+2a^2x^2+x+a+1}+(a-x)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^3x^4+2a^2x^2+x+a+1\right)\left(2008^{x-a}-1\right)+$$

$$+(x-a)\left(2008^{a^3x^4+2a^2x^2+x+a+1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow f(x)\left(2008^{x-a}-1\right)+(x-a)\left(2008^{f(x)}-1\right)=0$$

với $f(x)=a^3x^4+2a^2x^2+x+a+1$

* Nếu $x=a$ hoặc $f(x)=0$ thì (1) thỏa.

* Nếu $f(x)\neq 0$ và $x\neq a$ thì (1) $\Leftrightarrow \dfrac{2008^{x-a}-1}{x-a}+\dfrac{2008^{f(x)}-1}{f(x)}=0$ (2).

Đặt $g(t)=\dfrac{2008^t-1}{t}$.

Nhận xét: Nếu $t>0$ thì $g(t)>0$ và nếu $t<0$ thì $g(t)>0$.

Suy ra với mọi $t\neq 0$ thì $g(t)>0 \Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

Vậy (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ f(x)=0 \end{array}\right.$ (3)

Ta có (3) $\Leftrightarrow a^3x^4+2a^2x^2+x+a+1=0$

$$\Leftrightarrow a^4x^4 + 2a^3x^2 + ax + a^2 + a = 0$$

Đặt $t = ax$ ta được $t^4 + 2at^2 + t + a^2 + a = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + (2t^2 + 1)a + t^4 + t = 0$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-2t^2 - 1 \pm (2t-1)}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -t^2 + t - 1 \\ a = -t^2 - t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t^2 - t + a + 1 = 0 & (4) \\ t^2 + t + a = 0 & (5) \end{array}\right.$$

* (4) có $\Delta = -4a - 3 < 0$ nên (4) vô nghiệm

* (5) có $\Delta = 1 - 4a = \dfrac{1971}{1975} > 0$ nên (5) có 2 nghiệm là

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{1971}{1975}}}{2}$$

Suy ra (3) có 2 nghiệm là $x = \dfrac{1975\left(-1 \pm \sqrt{\frac{1971}{1975}}\right)}{2}$.

Vậy (1) có 3 nghiệm là $x = \dfrac{1}{1975}$, $x = \dfrac{1975\left(-1 \pm \sqrt{\frac{1971}{1975}}\right)}{2}$.

Câu 2: *(... điểm)*

Cho n là số nguyên dương. Tìm số các đa thức P(x) bậc n với các hệ số thuộc tập hợp

$E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ và thỏa $P(3) = n$.

Đáp án

Xét $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ với $a_k \in E$ và $P(3) = n$

Do $a_k \in E$ nên có thể viết a_k dưới dạng $a_k = 3b_k + c_k$ với b_k và c_k thuộc $F = \{0; 1; 2\}$

$$\Rightarrow P(x) = \sum_{k=0}^{n} (3b_k + c_k)x^k \Rightarrow P(3) = 3\sum_{k=0}^{n} b_k 3^k + \sum_{k=0}^{n} c_k 3^k$$

Đặt $t = \sum_{k=0}^{n} b_k 3^k$ ta có $t \in N$ và $n = 3t + \sum_{k=0}^{n} c_k 3^k \geq 3t \Rightarrow t \in N$ sao cho $0 \leq t \leq \left[\dfrac{n}{3}\right]$.

Ngược lại, với $t \in N$ và $0 \leq t \leq \left[\dfrac{n}{3}\right]$, tồn tại duy nhất cách viết

$t = \sum_{k=0}^{n} b_k 3^k$ với $b_k \in F$.

(khai triển dạng cơ số 3 của t)

và có duy nhất cách viết $n - 3t = \sum_{k=0}^{n} c_k 3^k$ với $c_k \in F$ (khai triển dạng cơ số 3 của n – 3t).

Khi đó đa thức $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ với $a_k = 3b_k + c_k$ có các hệ số $a_k \in E$ và thỏa $P(3) = n$.

Như vậy: Tồn tại song ánh giữa tập hợp các đa thức P(x) thỏa điều kiện đề bài và tập hợp

$$G = \{0; 1; 2; ...; \left[\frac{n}{3}\right]\}.$$

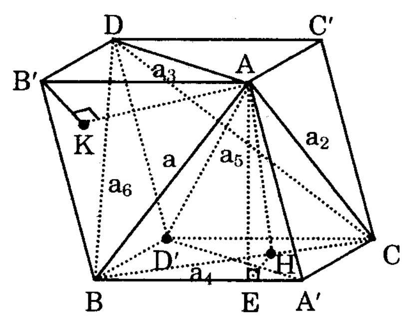
Do đó số đa thức P(x) thỏa yêu cầu bài toán là $\left[\frac{n}{3}\right] + 1$.

Câu 3: *(... điểm)*

Trong các tứ diện có tổng độ dài các cạnh bằng 6, hãy tìm tứ diện có thể tích lớn nhất.

Đáp án

Giả sử ABCD là tứ diện có tổng độ dài 6 cạnh bằng 6. Gọi $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5$ và a_6 lần lượt là độ dài các cạnh AB, AC, AD, BC, CD và DB.



Ta dựng hình hộp AB'DC'.A'BD'C và đặt V_1; V lần lượt là thể tích của hình hộp và của tứ diện ABCD.

Vẽ AH ⊥ (A'BD'C) tại H, AE ⊥ A'B tại E và AK ⊥ (BB'DD') tại K.

Ta có: $V_{BB'AD} = V_{CC'DA} = V_{AA'BC} = V_{DD'BC} = \frac{1}{6}V_1$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}V_1 \qquad (1)$$

$$* \; V_1 = S_{A'BD'C}.AH = \frac{1}{2}a_3a_4 \sin(\widehat{AD;BC}).AH \le \frac{1}{2}a_3a_4.AH \qquad (2)$$

Tương tự ta có $V_1 \le \frac{1}{2}a_2a_6.AK$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra

$$V_1^2 \le \frac{1}{4}a_3a_4a_2a_6.AH.AK \le \frac{1}{4}a_3a_4a_2a_6.AB'.AE$$

$$= \frac{1}{4}a_3a_4a_2a_6.S_{A'BB'A} = \frac{1}{8}a_3a_4a_2a_6.a_1.a_5\sin(\widehat{AB;A'B'})$$

$$\le \frac{1}{8}a_3a_4a_2a_6.a_1.a_5 \le \frac{1}{8}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_6}{6}\right)^6 = \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow V_1 \le \dfrac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow V \le \dfrac{\sqrt{12}}{12}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ ABCD là tứ diện đều có cạnh bằng 1.

Vậy tứ diện đều có cạnh bằng 1 là tứ diện cần tìm.

Câu 4: *(... điểm)*

Cho $a_1, a_2, a_3,\ldots, a_{2008}$ là các số thực không âm thay đổi sao cho:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2008} = 2$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = \frac{a_1}{a_2^2+1} + \frac{a_2}{a_3^2+1} + \ldots + \frac{a_{2007}}{a_{2008}^2+1} + \frac{a_{2008}}{a_1^2+1}.$$

Đáp án

Xem $a_{2009} = a_1$, ta có:

$$F = \sum_{i=1}^{2008}\frac{a_i}{a_{i+1}^2+1} = \sum_{i=1}^{2008}\left(a_i - \frac{a_ia_{i+1}^2}{a_{i+1}^2+1}\right)$$

$$= 2 - \sum_{i=1}^{2008}\frac{a_ia_{i+1}^2}{a_{i+1}^2+1} \ge 2 - \sum_{i=1}^{2008}\frac{a_ia_{i+1}}{2} \qquad (1)$$

(Vì $\dfrac{a_ia_{i+1}^2}{a_{i+1}^2+1} \le \dfrac{a_ia_{i+1}}{2} \Leftrightarrow a_ia_{i+1}^3 + a_ia_{i+1} \ge 2a_ia_{i+1}^2 \Leftrightarrow a_ia_{i+1}(a_{i+1}-1)^2 \ge 0$)

Bổ đề: Nếu $n \ge 4$ thì $\forall\ a_1, a_2,\ldots, a_n \ge 0$ ta luôn có:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \ge 4(a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1)$$

Chứng minh bổ đề:

Đặt $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 4(a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1)$

ta chứng minh $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ge 0$ (*) bằng quy nạp theo n ($n \ge 4$)

+) n = 4: $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 - 4(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1) \ge 0$

$\Leftrightarrow [(a_1 + a_3) + (a_2 + a_4)]^2 - 4(a_1 + a_3)(a_2 + a_4) \ge 0$

$\Leftrightarrow [(a_1 + a_3) - (a_2 + a_4)]^2 \ge 0$ (đúng)

+ Giả sử (*) đúng với $n = k$ $(k \geq 4)$. Ta chứng minh (*) đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy: Với $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1} \geq 0$ ta có $f(a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1})$ không đổi qua phép hoán vị vòng quanh các biến nên có thể giả sử $a_{k+1} = \min(a_1, a_2, .., a_{k+1})$. Theo giả thiết quy nạp ta có:

$f(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k + a_{k+1}) \geq 0.$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}
&f(a_1, a_2, .., a_{k-1}, a_k, a_{k+1}) - f(a_1, a_2, .., a_{k-1}, a_k + a_{k+1})\\
&= (a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + a_k + a_{k+1})^2 - 4(a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{k-1}a_k + a_ka_{k+1}\\
&\quad + a_{k+1}a_1) - [a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + (a_k + a_{k+1})]^2 + 4[a_1a_2 + a_2a_3 +\\
&\quad + ... + a_{k-1}(a_k + a_{k+1}) + (a_k + a_{k+1})a_1]\\
&= 4[a_{k-1}a_{k+1} + a_1a_k - a_ka_{k+1}] = 4[a_{k-1}a_{k+1} + a_k(a_1 - a_{k+1})] \geq 0
\end{aligned}$$

Vậy $f(a_1, a_2, .., a_{k-1}, a_k, a_{k+1}) \geq f(a_1, a_2, .., a_{k-1}, a_k + a_{k+1}) \geq 0$. Bổ đề được chứng minh.

Áp dụng Bổ đề vào bài toán đang xét ta có:

$$4 = (a_1 + a_2 + ... + a_{2008})^2 \geq 4[a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{2007}a_{2008} + a_{2008}a_1]$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2008} a_ia_{i+1} \leq 1 \ (a_{2009} = a_1) \Rightarrow 2 - \sum_{i=1}^{2008} \frac{a_ia_{i+1}}{2} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow F \geq \frac{3}{2}$. Lấy $a_1 = a_2 = 1$; $a_3 = a_4 = ... = a_{2008} = 0$ ta có $F = \frac{3}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của F là $\frac{3}{2}$.

Câu 5: *(... điểm)*

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên n lớn hơn hay bằng 2, phương trình $1975(x^n - x) = 2008$ trên $(0; +\infty)$ có nghiệm duy nhất x_n. Chứng minh dãy $(x_n)_{n\geq 2}$ hội tụ về 1 và tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} n(x_n - 1)$.

Đáp án

Phương trình $1975(x^n - x) = 2008$ (*)

a) Với mọi $n \in N$, $n \geq 2$ xét hàm số $f_n(x) = 1975(x^n - x) - 2008$.

Ta có:

* $f_n(x)$ liên tục trên R

* Nếu $0 \leq x \leq 1$ thì $x^n - x \leq 0 \Rightarrow f_n(x) < 0$, $\forall x \in [0; 1]$

* $f_n(2) = 1975(2^n - 2) - 2008 \geq 1975(2^2 - 2) - 2008 > 0$

* $f_n'(x) = 1975(nx^{n-1} - 1) > 1975(n - 1) > 0, \forall x > 1 \Rightarrow f_n(x)$ tăng trên $(1; +\infty)$

Suy ra $\forall n \in N$ và $n \ge 2$ trên $(0; +\infty)$ phương trình (*) có nghiệm duy nhất x_n và $1 < x_n < 2$.

b) Với mọi $n \in Z$ và $n \ge 2$ ta có:

* $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 1975(x^{n+1} - x) - 1975(x^n - x) = 1975x^n(x - 1)$

$\Rightarrow f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) = 1975\, x_n^n(x_n - 1) > 0$

$\Rightarrow f_{n+1}(x_n) > f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$

Mà $f_{n+1}(x)$ tăng trên $(1; +\infty) \Rightarrow x_n > x_{n+1}, \forall n \in N, n \ge 2$

$\Rightarrow (x_n)$ giảm, $\forall n \ge 2$.

* Kết hợp với $1 < x_n < 2, \forall n \in N, n \ge 2$ ta suy ra (x_n) hội tụ về a và $2 > x_n \ge a \ge 1 \forall n \in N, n \ge 2$

Ta chứng minh a = 1:

Giả sử a > 1 khi đó $\lim a^n = +\infty$ nên $\exists m \in N^*$ sao cho $a^m > 4$

$\Rightarrow 0 = f_m(x_m) = 1975(x_m^m - x_m) - 2008$

$\ge 1975(a^m - 2) - 2008 > 1975(2) - 2008 > 0$ (vô lí)

Vậy a = 1 nghĩa là (x_n) hội tụ về 1.

c) Đặt $y_n = x_n - 1 \Rightarrow y_n > 0, \forall n \in N, n \ge 2$ và $\lim y_n = 0$ (do $x_n > 1$ và $\lim x_n = 1$)

Với mọi $n \in N, n \ge 2$ ta có:

$$0 = f_n(x_n) = 1975(- x_n) - 2008$$

$$\Rightarrow x_n^n = x_n + \frac{2008}{1975}$$

$$\Rightarrow (1 + y_n)^n = y_n + \frac{3983}{1975} \Rightarrow n\ln(1 + y_n) = \ln(y_n + \frac{3983}{1975})$$

$$\Rightarrow ny_n = \frac{\ln(y_n + \frac{3983}{1975})}{\frac{\ln(1 + y_n)}{y_n}}$$

$$\Rightarrow \lim n(x_n - 1) = \lim ny_n = \ln\frac{3983}{1975} \text{ (do } \frac{\lim(1 + y_n)}{y_n} = 1)$$

Câu 6: *(... điểm)*

Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập hợp các số nguyên Z và lấy giá trị trong tập số thực dương R^+ sao cho

$$f(m - 1)f(m) + f(m)f(m + 1) \le 2f(m - 1)f(m + 1), \forall m \in Z.$$

Đáp án

Giả sử hàm số f thỏa

$$f(m-1)f(m) + f(m)f(m+1) \le 2f(m-1)f(m+1),\ \forall\ m \in Z \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(m+1)} + \frac{1}{f(m-1)} \le \frac{2}{f(m)},\ \forall\ m \in Z.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(m+1)} - \frac{1}{f(m)} \le \frac{1}{f(m)} - \frac{1}{f(m-1)},\ \forall\ m \in Z.$$

Đặt $g(m) = \frac{1}{f(m)} - \frac{1}{f(m-1)}$, $\forall\ m \in Z$. Ta có: $g(m+1) \le g(m)$, $\forall\ m \in Z$ (2)

Nếu f(m) không là hàm hằng thì tồn tại $k \in Z$ sao cho $g(k) \neq 0$.

➢ Xét trường hợp $g(k) < 0$:

Lấy số nguyên dương p sao cho $p > -\frac{1}{g(k)f(k)} \Rightarrow \frac{1}{f(k)} + pg(k) < 0$

Ta có $\frac{1}{f(k+p)} = \frac{1}{f(k)} + g(k+1) + g(k+2) + \dots + g(k+p)$

$$\overset{(do (2))}{\le} \frac{1}{f(k)} + pg(k) < 0$$

mâu thuẫn với giả thiết $f(k+p) \in R^+$.

➢ Xét trường hợp $g(k) > 0$:

Lấy số nguyên dương q sao cho $q > \frac{1}{g(k)f(k)} \Rightarrow -\frac{1}{f(k)} + qg(k) > 0$

Ta có: $\frac{-1}{f(k-q)} = -\frac{1}{f(k)} + g(k) + g(k-1) + \dots + g(k-q+1)$

$$\overset{(do (2))}{\ge} -\frac{1}{f(k)} + qg(k) > 0$$

mâu thuẫn với giả thiết $f(k-q) \in R^+$.

Vậy f(m) phải là hàm hằng $\Rightarrow f(m) = C$, $\forall\ m \in Z$ với C là số thực dương tùy ý.

Ngược lại: Nếu $f(m) = C$, $\forall m \in Z$ với C là số thực dương tùy ý thì (1) thỏa.

Vậy $f(m) = C$, $\forall m \in Z$ và C là số thực dương tùy ý là hàm số phải tìm.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 11

TRƯỜNG THPT TP CAO LÃNH – ĐỒNG THÁP

Câu 1: *(3 điểm)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 3z - 3z^2x + z^3 = 0 \\ y - 3x - 3x^2y + x^3 = 0 \\ z - 3y - 3y^2z + y^3 = 0 \end{cases}$

Đáp án

Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(1 - 3z^2\right) = 3z - z^3 \\ y\left(1 - 3x^2\right) = 3x - x^3 \\ z\left(1 - 3y^2\right) = 3y - y^3 \end{cases}$ (I) ĐK: x, y, $z \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3z - z^3}{1 - 3z^2} (1) \\ y = \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2} (2) \\ z = \dfrac{3y - y^3}{1 - 3y^2} (3) \end{cases} \quad (\mathrm{II})$$

Đặt: $x = \tan\alpha$, $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (4) và $\tan\alpha$, $\tan3\alpha$, $\tan9\alpha \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (5).

Khi đó từ (II) có: $y = \tan3\alpha$; $z = \tan9\alpha$; $x = \tan27\alpha$. Từ đó, (x, y, z) là nghiệm của (II) khi và chỉ khi: $x = \tan\alpha$; $y = \tan3\beta$; $z = \tan9\alpha$ với α được xác định bởi (4), (5) và $\tan\alpha = \tan27\alpha$ (6).

Ta có: (6) $\Leftrightarrow 26\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{k\pi}{26}$; α thỏa đồng thời (4), (6)

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{k\pi}{26}$, $k \in \mathbb{Z}$: $-12 \leq k \leq 12$. Tất cả những giá trị này đều thỏa (5).

Vậy hệ có 25 nghiệm:

$$\left(x = \tan\frac{k\pi}{26}; y = \tan\frac{3k\pi}{26}; z = \tan\frac{9k\pi}{26}\right); k = 0; \pm1; \pm2; \ldots; \pm12.$$

Câu 2: *(3 điểm)*

Cho 6 số $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ sao cho $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = 1$;

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{x_i}\ ;\ \sum_{1\le i<j\le 6} x_i x_j = \sum_{1\le i<j\le 6} \frac{1}{x_i x_j}\quad (*)$$

Chứng minh rằng khi đó các số $(x_i)_{i=1}^{6}$ được chia thành 3 cặp, tích hai số trong mỗi cặp bằng 1.

Đáp án

Đặt $S_1 = \sum_{i=1}^{6} x_i$ $\qquad S_2 = \sum_{1\le i<j\le 6} x_i x_j$

$S_3 = \sum_{1\le i<j<k\le 6} x_i x_j x_k$ $\qquad S_4 = \sum_{1\le i<j<k<l\le 6} x_i x_j x_k x_l$

$S_5 = \sum_{1\le i<j<k<l<m\le 6} x_i x_j x_k x_l x_m$ $\qquad S_6 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$

Theo định lý Viet $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ là 6 nghiệm của phương trình

$$x^6 - S_1x^5 + S_2x^4 - S_3x^3 + S_4x^2 - S_5x + 1 = 0 \qquad (1)$$

Từ giả thiết (*) ta được $\begin{cases} S_1 = S_5 \\ S_2 = S_4 \end{cases}$

Do đó, nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $\frac{1}{x_0}$ cũng là nghiệm của (1).

Vậy tập nghiệm của (1) được phân thành 3 cặp mà tích hai số trong mỗi cặp bằng 1.

Câu 3:

Cho hai đường thẳng x, y cố định. Hai điểm M, N thay đổi trên x và hai điểm P, Q thay đổi trên y sao cho MN = a và PQ = b, trong đó a, b là các độ dài cho trước.

Hãy xác định vị trí của M, N, P, Q sao cho bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện MNPQ là lớn nhất.

Đáp án

Gọi V, S và r lần lượt là thể tích, diện tích toàn phần và bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện MNPQ. XY là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng x, y, X trên x và Y trên y, XY = d, (x, y) = φ.

Ta có $\quad r = \frac{3V}{S}$

$$V = \frac{1}{6}MN.PQ.XY.\sin(x, y) = \frac{1}{6}abd.\sin\varphi = const.$$

Từ đó suy ra rmax $\Leftrightarrow$ Smin

Hạ $MM_1 \perp y = M_1$; $NN_1 \perp y = N_1$; $PP_1 \perp x = P_1$; $QQ_1 \perp x = Q_1$

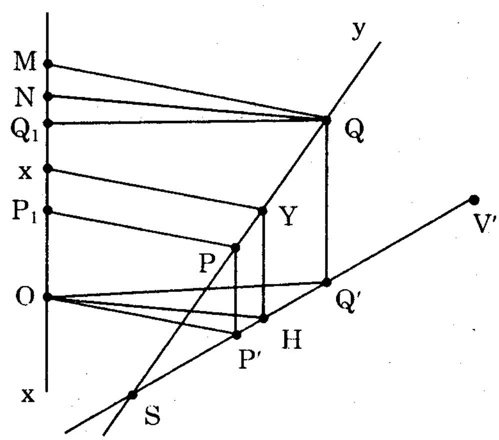
Ta có $2S = MN(PP_1 + QQ_1) + PQ(MM_1 + NN_1) = 2S_1 + 2S_2$ trong đó $2S_1 = a(PP_1 + QQ_1)$; $2S_2 = b(MM_1 + NN_1)$

Ta chứng minh S_1 = min và S_2 = min $\Leftrightarrow$ S = min. Thật vậy, chiếu toàn bộ hình vẽ lên mp (P) nào đó vuông góc với x ở điểm O. Gọi y' là hình chiếu của y lên (P), trong đó O, H, P', Q' lần lượt là hình chiếu của X, Y, P và Q trên (P).

Dễ thấy: OH //= XY = d' P'Q' = PQsinφ = b' = bsinφ (hằng số), cũng vậy: PP_1 //= OP'; QQ_1 //= OQ'

Từ đó ta được, $2S_1 = a(OP' + OQ')$. Suy ra: S_1min $\Leftrightarrow$ OP' + OQ' = min

Vì OH $\perp$ P'Q' = H, OH = d, P'Q' = b' = bsinφ nên tam giác OP'Q' có diện tích không đổi. Từ đó dễ thấy tam giác OP'Q' có chu vi nhỏ nhất, tức là OP' + OQ'= min, khi và chỉ khi nó là tam giác cân ở O, tức là khi và chỉ khi P' và Q' đối xứng nhau qua H, và do đó P và Q đối xứng nhau qua Y.



Chứng minh tương tự, S_2 = min $\Leftrightarrow$ M và N đối xứng nhau qua X.

Tóm lại, bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện MNPQ lớn nhất khi và chỉ khi đường vuông góc chung XY của hai đường chéo nhau x và y là trục đối xứng của tứ diện MNPQ (có cạnh MN = a trên x và cạnh PQ = b trên y), nghĩa là: $XM = XN = \frac{a}{2}$ và $YP = YQ = \frac{b}{2}$.

Câu 4:

Cho m là số nguyên lớn hơn 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = ab^{m-1} + a^{m-1}b$, trong đó a, b thỏa: a + b = 1 và $0 \le a, b \le \frac{m-2}{2}$.

Đáp án

Ta có $P = ab^{m-1} + a^{m-1}b = a(1-a)^{m-1} + a^{m-1}(1-a)$

$$= a^{m-1} - a^m + (1-a)^{m-1} - (1-a)^m,\ \frac{2}{m} \le a \le \frac{m-2}{m}$$

Xét hàm số $f(x) = x^{m-1} - x^m + (1-x)^{m-1} - (1-x)^m\ x \in \left[\frac{2}{m};\frac{m-2}{m}\right]$

Ta có: $f'(x) = (m-1)x^{m-2} - mx^{m-1} -$

$$-(m-1)(1-x)^{m-2} + m(1-x)^{m-1} \qquad (1)$$

$$f''(x) = m(m-1)x^{m-3}\left[\frac{m-2}{m} - x\right] + m(m-1)(1-x)^{m-3}\left[x - \frac{2}{m}\right]$$

Vì $x \in \left[\frac{m}{2};\frac{m-2}{m}\right]$ nên $f''(x) \ge 0 \Rightarrow f'(x)$ đồng biến.

Với $\frac{1}{2} < x \le \frac{m-2}{m} \Rightarrow f'(x) > f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow$ f(x) đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};\frac{m-2}{m}\right]$

Với $\frac{2}{m} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) < f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $\left[\frac{2}{m};\frac{1}{2}\right]$

Do đó, $f_{min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{1-m}$

$$f_{max} = \max\left\{f\left(\frac{2}{m}\right);f\left(\frac{m-2}{m}\right)\right\} = \left(\frac{m-2}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)^{m-1} + \left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right)^{m-1}$$

Câu 5:

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n cho trước phương trình: $x^{2n+1} - x - 1 = 0$ có đúng một nghiệm số thực. Gọi nghiệm số thực ấy là x_n. Hãy tìm $\lim x_n$.

Đáp án

Ta thấy $x \le 1$ không phải là nghiệm của phương trình.

Thật vậy $x^{2x+1} - x = x(x^{2n} - 1) = 1$

Nếu $x \le -1 \Rightarrow x^{2n} \ge 1$. Vế trái âm.

Nếu $0 < x < 1$ thì $x^{2n+1} < 0$ còn $x + 1 > 0$.

Nếu $-1 < x \le 0$ thì $x^{2n+1} \le 0 < x + 1$.

Xét hàm $f(x) = x^{2n+1} - x - 1$ có $f'(x) = (2n + 1)x^{2n} - 1 > 0$ với $x > 1$ mà $f(1) = -1 < 0$ nên tồn tại duy nhất $1 < x_n$ để $f(x_n) = 0$.

Theo BĐT Côsi: $x_n = \sqrt[2n+1]{x_n + 1} \le \dfrac{2n + x_n + 1}{2n+1} \Leftrightarrow x_n \le \dfrac{2n+1}{2n}$

Vì $1 < x_n \le \dfrac{2n+1}{2n}$ mà $\lim \dfrac{2n+1}{2n} = 1$ nên: $\lim x_n = 1$.

Bài 6:

Tìm các đa thức f(x) có tất cả các hệ số đều là số nguyên không âm nhỏ hơn 7 và thỏa: f(7) = 2008.

Đáp án

Xét đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ với $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ đều là các số nguyên không âm và nhỏ hơn 7.

Do $\quad f(7) = 2008 \Rightarrow a_n 7^n + a_{n-1}7^{n-1} + ... + a_1 7 + a_0 = 2008$

Ở đây, $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ là các chữ số của 2008 được viết trong hệ ghi số cơ số 7.

Thực hiện phép chia 2008 cho 7 được dư $a_0 = 6$, lại lấy thương chia cho 7, liên tiếp như thế, ta được đa thức cần tìm là:

$$f(x) = 5x^3 + 5x^2 + 6x + 6.$$

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 11

TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN – NINH THUẬN

Câu 1:

Cho dãy số (x_n) được xác định bởi công thức:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \\ x_{n+1} = x_n^3 + 6x_{n-1} + 3.2^{2008} \end{cases}$$

Chứng minh rằng x_n không thể biểu diễn được dưới dạng tổng của lũy thừa bậc 6 của ba số nguyên dương.

Đáp án

Xét $A = a^6 + b^6 + c^6$

Theo định lý Fermat: $x^{13} \equiv x \pmod{13}$

$\Leftrightarrow x(x^6 - 1)(x^6 + 1) \equiv 0 \pmod{13}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^6 \equiv 0 \\ x^6 \equiv 1 \\ x^6 \equiv -1 \end{array}\right. \pmod{13}$$ *1đ*

Vậy bộ thặng dư của A mod 13 là:

$S = \{0, \pm1, \pm2, \pm3\}$

Ta có $2^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{2004} \equiv 1 \pmod{13}$ (do $2004 \vdots 12$)

Nên: $2^{2008} = 2^4.2^{2004} \equiv 2^4 \pmod{13} \equiv 3$

$\Rightarrow 3.2^{2008} \equiv 9 \pmod{13}$

Nên: $x_{n+1} \equiv x_n^3 + 6x_{n-1} + 9 \pmod{13}$ *1đ*

Ta có: $\begin{cases} x_3 \equiv 382 \equiv 5 \pmod{13} \\ x_4 \equiv 176 \equiv 7 \pmod{13} \end{cases} \Rightarrow$ Số dư của x_n khi chia cho 13 tuần hoàn với chu kì 2.

$\Leftrightarrow x_n \equiv x_{n-2} \pmod{13}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{2n} \equiv x_2 \equiv 7 \pmod{13} \\ x_{2n+1} \equiv x_1 \equiv 5 \pmod{13} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_n \equiv 5 \\ x_n \equiv 7 \end{array}\right. \pmod{13}$$

mà $5, 7 \notin S$

Vậy x_n không thể biểu diễn được dưới dạng tổng của lũy thừa bậc sáu của 3 số nguyên dương. *1đ*

Câu 2:

Cho hàm số f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa:

$$f_{17}(x) + 503\,f(x) = 504x + 1560$$

Với ký hiệu $f_{17}(x) = \underbrace{f(f(f(...(x))))}_{17 \text{ lần } f}$. Xác định f(x).

Đáp án

Từ $f_{17}(x) + 503f(x) = 504x + 1560$. Ta có:

$$503f(x) < 504x + 1560$$

$$\Leftrightarrow f(x) < x + \frac{x + 1560}{503}$$ *1đ*

$$\Leftrightarrow f(x) < x + 4 : \forall x \le 452$$

$$\Leftrightarrow f(x) \le x + 3; \forall x < 452 \quad (*)$$

Đặt: $f(x) = x + 3 + t$

Xét $x \in [1,48]$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \le x + 3 \le 48 + 3 = 51 < 452 \\ f_2(x) \le f(x) + 3 \le 51 + 3 = 54 < 452 \\ \vdots \\ f_{17}(x) \le f_{16}(x) + 3 \le 99 < 452 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{17}(x) \le x + 51; \forall x \le 48$$ *1đ*

Ta có:

$$f_{17}(x) + 503f(x) = 504x + 1560 \le 503f(x) + x + 51; \forall \le 48$$

$$\Leftrightarrow 504x + 1560 \le 503(x + 3 + t) + x + 51$$

$$\Leftrightarrow t \ge 0$$

Mà: $f(x) = x + 3 + t \le x + 3; \forall x \le 48$

$\Rightarrow f(x) = x + 3; \forall x \le 48$

Ta chứng minh quy nạp: $f(x) = x + 3; \forall x \in N^*$ *1đ*

* $n \le 48$ thì $f(n) = n + 3$ đúng chứng minh ở trên

* $n > 48$

Giả sử khẳng định đúng $\forall n < m$ ta có:

$$f_{16}(m - 48) = f_{15}(m - 45) = ... = f_1(m - 3) = m$$

$$\Rightarrow f(m) = f_{17}(m - 48) = 504(m - 48) + 1560 - f(m - 48).503$$

$$= 504(m - 48) + 1560 - 503(m - 45)$$

$$= m + 3$$

Vậy $f(m) = m + 3$ *1đ*

Câu 2:

Cho hàm số f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa:

$$f_{17}(x) + 503\, f(x) = 504x + 1560$$

Với ký hiệu $f_{17}(x) = f\underbrace{(f(f(...(x))))}_{17 \text{ lần } f}$. Xác định f(x).

Đáp án

Từ $f_{17}(x) + 503f(x) = 504x + 1560$. Ta có:

$$503f(x) < 504x + 1560$$

$$\Leftrightarrow f(x) < x + \frac{x + 1560}{503}$$ *1đ*

$$\Leftrightarrow f(x) < x + 4 : \forall x \le 452$$

$$\Leftrightarrow f(x) \le x + 3; \forall x < 452 \quad (*)$$

Đặt: $f(x) = x + 3 + t$

Xét $x \in [1,48]$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \le x + 3 \le 48 + 3 = 51 < 452 \\ f_2(x) \le f(x) + 3 \le 51 + 3 = 54 < 452 \\ \vdots \\ f_{17}(x) \le f_{16}(x) + 3 \le 99 < 452 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{17}(x) \le x + 51; \forall x \le 48$$ *1đ*

Ta có:

$$f_{17}(x) + 503f(x) = 504x + 1560 \le 503f(x) + x + 51; \forall \le 48$$

$$\Leftrightarrow 504x + 1560 \le 503(x + 3 + t) + x + 51$$

$$\Leftrightarrow t \ge 0$$

Mà: $f(x) = x + 3 + t \le x + 3; \forall x \le 48$

$\Rightarrow f(x) = x + 3; \forall x \le 48$

Ta chứng minh quy nạp: $f(x) = x + 3; \forall x \in N^*$ *1đ*

* $n \le 48$ thì $f(n) = n + 3$ đúng chứng minh ở trên

* $n > 48$

Giả sử khẳng định đúng $\forall n < m$ ta có:

$$f_{16}(m - 48) = f_{15}(m - 45) = ... = f_1(m - 3) = m$$

$$\Rightarrow f(m) = f_{17}(m - 48) = 504(m - 48) + 1560 - f(m - 48).503$$

$$= 504(m - 48) + 1560 - 503(m - 45)$$

$$= m + 3$$

Vậy $f(m) = m + 3$ *1đ*

Câu 3:

Cho 2008 số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng trong số các số đó, có một số chia hết cho 2008 hoặc có một số số mà tổng chia hết cho 2008.

Đáp án

Gọi 2008 số tự nhiên đó là $a_1, a_2, \ldots, a_{2008}$

Đặt: $s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

...

$s_{2008} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2008}$

Chia tất cả các số hạng của dãy cho 2008 *1đ*

TH1: Nếu có một số hạng của dãy chia hết cho 2008

Bài toán được chứng minh. *0,5đ*

TH2: Không có số hạng nào của dãy chia hết cho 2008. Có tất cả 2008 phép chia mà số dư tối đa chỉ gồm 2007 giá trị có thể có là 1, 2, 3, ..., 2007 do đó có ít nhất 2 số hạng của dãy chia hết cho 2008 có cùng số dư.

Gọi 2 số đó là s_i, s_j

$s_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i$

$s_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_j$ *1đ*

Với $i, j \in \mathbb{N}$ và $1 \le i \le j \le 2008$

$\Rightarrow s_j - s_i \,\vdots\, 2008$

$\Rightarrow a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + \ldots + a_j \,\vdots\, 2008$ *0,5đ*

Câu 4:

Giải phương trình $(\log_2 x)^2 + x.\log_7(x+3) = \log_2 x\left[\dfrac{x}{2} + 2\log_7(x+3)\right]$

Đáp án

ĐK $x > 0$ phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_2 x(\log_2 x - \frac{x}{2}) - 2\log_7(x+3)(\log_2 x - \frac{x}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 - \frac{x}{2})(\log_2 x - 2\log_7(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \log_2 x - \dfrac{x}{2} = 0 & (1) \\ \log_2 x - 2\log_7(x+3) = 0 & (2) \end{array}\right.$$ *1đ*

Giải (1): (1) $\Leftrightarrow 2^x = x^2 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln 2}{2}$ (3)

Ta nhận thấy x = 2 và x = 4 là nghiệm phương trình (3)

Thật vậy, xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ ta có $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

Suy ra: $f'(x) > 0$ với $0 < x < e$

$f'(x) = 0$ với $x = e$

$f'(x) < 0$ với $x > e$

Nên vế trái phương trình (3) đồng biến (0; 2] và nghịch biến [2; +∞) trong khi đó vế phải là hàm hằng nên phương trình (3) có nhiều nhất 2 nghiệm.

Vậy (3) có 2 nghiệm x = 2 và x = 4 *1đ*

Giải (2):

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$

Phương trình (2) trở thành $t = 2\log_7(2^t + 3)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^t + 6\left(\frac{2}{7}\right)^t + 9\left(\frac{1}{7}\right)^t = 2 \quad (4)$$

$\Leftrightarrow t = 2$

$\Leftrightarrow x = 2^2 = 4$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: x = 2 và x = 4 *1đ*

Câu 5:

Cho một tứ diện ABCD có thể tích V. Một mặt phẳng α qua trọng tâm G của tứ diện cắt AB, AC, AD lần lượt tại B', C', D'. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = V_{BB'C'D'} + V_{CB'C'D'} + V_{DB'C'D'}$

Đáp án

Gọi $AB_1 = (ABG) \cap (ACD)$

$AC_1 = (ACG) \cap (ABD)$

$AD_1 = (ADG) \cap (ABC)$

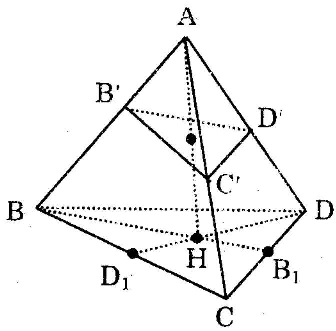
$AG \cap (BCD) = \{H\} \Rightarrow$ H trọng tâm ΔBCD

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AH}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AB'}.\overrightarrow{AB'} + \frac{AC}{AC'}.\overrightarrow{AC'} + \frac{AD}{AD'}.\overrightarrow{AD'} = 3.\frac{4}{3}\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AG}$$

Do B', C', D' đồng phẳng nên

$$\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4 \qquad \textit{1đ}$$



Mà $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}\ge 3\sqrt[3]{\frac{AB.AC.AD}{AB'.AC'.AD'}}$

$$\Rightarrow \frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD}\ge\frac{27}{64}$$

Suy ra $\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}}=\frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}.\frac{AD'}{AD}\ge\frac{27}{64}$ *1đ*

Mà $T=V_{BB'C'D'}+V_{C.B'C'D'}+V_{D.B'C'D'}$

$$=V_{AB'C'D}\left(\frac{BB'}{AB'}+\frac{CC'}{AC'}+\frac{DD'}{AD'}\right)$$

Mặt khác: $4=\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}$

$$=\frac{AB'+B'B}{AB'}+\frac{AC'+C'C}{AC'}+\frac{AD'+D'D}{AD'}$$

$$=\frac{BB'}{AB'}+\frac{CC'}{AC'}+\frac{DD'}{AD'}+3$$

$$\Rightarrow \frac{BB'}{AB'}+\frac{CC'}{AC'}+\frac{DD'}{AD'}=1$$

$$\Rightarrow T=V_{AB'C'D'}\ge\frac{27}{64}V_{ABCD}=\frac{27}{64}V \qquad \textit{1,5đ}$$

Vậy $\min T=\frac{27}{64}V$

Điều này xảy ra khi:

$$\frac{BB'}{AB'}=\frac{CC'}{AC'}=\frac{DD'}{AD'}=\frac{1}{3} \qquad \textit{0,5đ}$$

$$\Rightarrow (B'C'D') // (BCD)$$

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẠC LIÊU – BẠC LIÊU

Câu 1: *(3 điểm)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^x - 2 = 3y - 3^x & (1) \\ 3^y - 2 = 3x - 2^y & (2) \end{cases}$.

Đáp án

Lấy (1) trừ (2) ta được: $(2^x - 2^y) + (3^x - 3^y) = 3(y - x)$ (3)

Nếu $x > y$ thì (3) không xảy ra.

Nếu $x < y$ thì (3) cũng không xảy ra.

$x = y$ thỏa (3) nên hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} 2^x + 3^x - 3x - 2 = 0 & (4) \\ y = x \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = 2^x + 3^x - 3x - 2$ với $x \in \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = 2^x\ln 2 + 3^x\ln 3 - 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồng biến trên $\mathbb{R}$ (do $f''(x) = 2^x(\ln 2)^2 + 3^x(\ln 3)^2 > 0$ với mọi x).

Mà $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -3$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có đúng một nghiệm x_0.

Suy ra bảng biến thiên của f(x) như sau:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Căn cứ vào bảng biến thiên của f(x) ta suy ra nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thì có nhiều nhất là 2 nghiệm.

Vì $f(0) = f(1) = 0$ nên $x = 0$ và $x = 1$ là hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Tóm lại hệ đã cho có đúng hai nghiệm (0; 0) và (1; 1).

Câu 2: *(3 điểm)*

Xung quanh bờ hồ hình tròn có 17 cây cau cảnh. Người ta dự định chặt bớt 4 cây sao cho không có 2 cây nào kề nhau bị chặt. Hỏi có bao nhiêu cách thực hiện khác nhau?

Đáp án

Chọn 1 cây bất kì trong hàng cây, đánh dấu là cây A. Có hai trường hợp sau xảy ra:

Trường hợp 1: Cây A không bị chặt. Khi đó xét hàng cây gồm 16 cây còn lại. Ta sẽ chặt 4 cây trong số 16 cây đó sao cho không có hai cây nào kề nhau bị chặt.

Giả sử đã chặt được 4 cây thỏa yêu cầu nói trên, lúc này hàng cây còn lại 12 cây (không kể cây A). Việc phục hồi lại hàng cây là đặt 4 cây đã chặt vào 4 vị trí đã chặt, số cách làm này bằng với số cách đặt 4 cây vào 4 trong số 13 vị trí xen kẽ giữa 12 cây (kể cả 2 đầu), nên:

Số cách chặt 4 cây ở trường hợp 1 là: $C_{13}^4 = 715$ (cách).

Trường hợp 2: Cây A bị chặt. Khi đó hàng cây còn lại 16 cây. Ta sẽ chặt 3 cây trong số 16 cây còn lại sao cho không có hai cây nào kề nhau bị chặt (hai cây ở hai phía của cây A cũng không được chặt).

Giả sử đã chặt được 3 cây thỏa yêu cầu nói trên, lúc này hàng cây còn lại 13 cây. Hai cây hai phía cây A vừa chặt không được chặt. Xét hàng cây gồm 11 cây còn lại.

Lập luận tương tự như trường hợp 1, ta có số cách chặt cây là: $C_{12}^3 = 220$ (cách).

Theo quy tắc cộng, ta có số cách chặt cây thỏa yêu cầu đề bài là: $715 + 220 = 935$ (cách).

Câu 3: *(4 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông cân tại A. M và N là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh AB và AC sao cho $AM + AN = \dfrac{BC}{\sqrt{2}}$. P là điểm đối xứng của A qua trung điểm O của MN. Chứng minh đường thẳng qua P vuông góc đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Đáp án

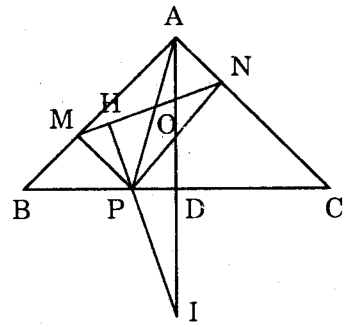
Gọi D là hình chiếu vuông góc của A trên BC.

H là hình chiếu vuông góc của P trên MN.

$I = AD \cap PH$, ta chứng minh I cố định.

Vì P đối xứng với A qua trung điểm O của MN nên tứ giác AMPN là hình bình hành và do đó là hình chữ nhật. (1)

Do $AM + AN = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = AB$ nên:



$$\begin{cases} MB = AN = MP \\ NC = AM = NP \end{cases} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ΔBMP, ΔPNC lần lượt vuông cân tại M và N.

Suy ra B, P, C thẳng hàng.

Do đó: $\widehat{APC} = 180^0 - \widehat{BPM} - \widehat{MPA}$

$= 180^0 - 45^0 - \widehat{MPA} \qquad (3)$

Mặt khác: $\widehat{MAP} = \widehat{HNP} \Rightarrow \widehat{MPA} = \widehat{HPN}$

$\Rightarrow \widehat{CPI} = \widehat{BPH} = 180^0 - \widehat{HPN} - \widehat{NPC} = 180^0 - 45^0 - \widehat{MPA} \qquad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{APC} = \widehat{CPI} \Rightarrow \Delta API$ cân tại P $\Rightarrow$ I đối xứng A qua BC $\Rightarrow$ I cố định.

Câu 4: *(3 điểm)*

Cho ba số dương a, b, c thỏa ab + bc + ca = 6abc.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \frac{1}{a+2b+3c} + \frac{1}{2a+3b+c} + \frac{1}{3a+b+2c}.$$

Đáp án

Với 6 số dương $a_1, a_2, \ldots, a_6$ ta có: $\left(\sum_{i=1}^{6} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{a_i}\right) \geq 36$

Suy ra $\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{6} a_i} \leq \dfrac{1}{36}\left(\sum_{i=1}^{6} \dfrac{1}{a_i}\right) \qquad (1)$

- Áp dụng (1) ta có:

$$\frac{1}{a+2b+3c} \leq \frac{1}{36}\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}\right)$$

$$\frac{1}{2a+3b+c} \leq \frac{1}{36}\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\frac{1}{3a+b+2c} \leq \frac{1}{36}\left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c}\right)$$

Cộng ba bất đẳng thức, ta được:

$$M \le \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{6}.\frac{ab+bc+ca}{abc} = 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \\ ab + bc + ca = 6abc \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức đã cho là 1.

Câu 5: *(4 điểm)*

Cho dãy số $\{a_n\}$ với số hạng tổng quát thỏa hệ thức:

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n.$$

Tính tổng của 2008 số hạng đầu tiên của dãy, biết rằng tổng của 2003 số hạng đầu tiên của dãy là 1897 và tổng của 1897 số hạng đầu tiên của dãy là 2003.

Đáp án

Đặt $a_1 = a$, $a_2 = b$. Ta có dãy số đã cho thành:

$$a, b, b - 1, -a, -b, a - b, a, b, b - a, -a, -b, a - b, a, b, \ldots$$

Suy ra dãy đã cho là dãy số tuần hoàn có chu kì T = 6 (chứng minh dễ dàng).

Kí hiệu S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của dãy, ta có $S_{6k} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Do đó: $S_{2003} = S_{2004} - a_{2004} = 0 - a_6 = -(a - b) = b - a = 1897$

$S_{1897} = S_{1896} + a_{1897} = 0 + a_1 = a = 2003$

Suy ra: a = 2003 và b = 3900

Vậy $S_{2008} = S_{2004} + a_{2005} + a_{2006} + a_{2007} + a_{2008}$

$= 0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$= a + b + (b - a) + (-a) = 2b - a = 4797.$

Bài 6: *(3 điểm)*

Tìm tất cả các hàm số f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa:

$$f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) = -x; \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Đáp án

$\forall$ x $\in \mathbb{R}$ ta có: $f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) = -x \Leftrightarrow f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{2x}{3} - \frac{x}{3}$

$$\Leftrightarrow f(x) + \frac{2x}{3} = \left[f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{3}\right] \qquad (2)$$

Từ (1) ta có: $f(0) = 0$.

Đặt $g(x) = f(x) + \frac{2x}{3}$, ta có: $g(0) = 0$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$g(x) = -g\left(\frac{x}{2}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (do (2)).

Suy ra: $g(x) = -g\left(\frac{x}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2^2}\right) = \ldots = (-1)^n g\left(\frac{x}{2^n}\right)$ với $n \in \mathbb{N}$, mà $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $g(0) = 0$ nên: $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x) = -\frac{2x}{3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Thử lại, ta thấy $f(x) = -\frac{2x}{3}$ thỏa (1).

Vậy có duy nhất một hàm số thỏa yêu cầu đề bài.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN LỚP 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẾN TRE – BẾN TRE

Câu 1: *(3 điểm)*

Cho a > 1, tìm tất cả bộ ba số thực (x,y,z) sao cho $|y| \geq 1$ thỏa phương trình:

$$\log_a^2(xy) + \log_a(x^3y^3 + xyz)^2 + \frac{8 + \sqrt{4z - y^2}}{2} = 0$$

Đáp án

Điều kiện: $\begin{cases} xy > 0 \\ x^3y^3 + xyz \neq 0 \\ 4z - y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy > 0 \\ xy(x^2y^2 + z) \neq 0 \\ 4z - y^2 \geq 0 \end{cases}$

Do $|y| \geq 1$ nên từ $4z - y^2 \geq 0$ suy ra $z \geq \frac{1}{4}$ do đó $xy(x^2y^2 + z) \neq 0$ do xy > 0. *0,5đ*

Suy ra: $x^2y^2 + z \geq x^2y^2 + \frac{1}{4} \geq xy$ (BĐT Côsi) *0,5đ*

Từ trên suy ra:

$$\log_a^2(xy) + \log_a(x^3y^3 + xyz)^2 + \frac{8 + \sqrt{4z - y^2}}{2}$$

$$\geq \log_a^2(xy) + \log_a(xy)^4 + \frac{8}{2}$$ *0,5đ*

$$\geq \log_a^2(xy) + 4\log_a(xy) + 4 = (\log_a(xy) + 2)^2 \geq 0$$ *0,5đ*

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} z = \frac{1}{4} \\ y = \pm 1 \\ xy = \frac{1}{2} \\ \log_a(xy) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{4} \\ y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ a = \sqrt{2} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} z = \frac{1}{4} \\ y = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \\ a = \sqrt{2} \end{cases}$$ *0,5đ*

Vậy * $a \neq \sqrt{2}$ phương trình vô nghiệm

* $a = \sqrt{2}$ phương trình có nghiệm

$(x = \frac{1}{2}; y = 1; z = \frac{1}{4})$ và $(x = -\frac{1}{2}; y = -1; z = \frac{1}{4})$ *0,5đ*

Câu 2: *(3 điểm)*

Cho 2008 điểm trên mặt phẳng sao cho 3 điểm bất kì trong chúng không thẳng hàng. Giả sử các đường thẳng nối các điểm từng đôi một cắt nhau và 3 trong số các đường thẳng đó chỉ có thể đồng quy tại một trong 2008 điểm đã cho. Tính số m các đường thẳng đó và số tam giác tạo bởi m đường thẳng đó.

Đáp án

Số đường thẳng $m = C_{2008}^{2}$ *0,5đ*

Nếu 3 trong m đường thẳng tạo một tam giác thì có: C_m^3 tam giác *0,5đ*

Xét một đỉnh A: có 2007 đường thẳng qua A; *0,5đ*

Số cách chọn 3 đường trong chúng là: C_{2007}^{3} *0,5đ*

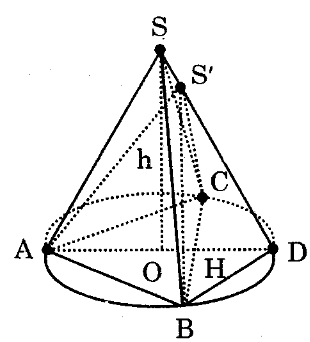
Tương ứng mỗi cách chọn là một tam giác bị loại. Suy ra: *0,5đ*

Số tam giác tạo bởi m đường thẳng đó là $C_m^3 - 2008.\ C_{2007}^{3}$ *0,5đ*

Câu 3: *(4 điểm)*

Trong một hình nón ta đặt một hình chóp có đáy là tam giác nội tiếp đáy hình nón, đỉnh hình chóp nằm trên một trong các đường sinh của hình nón. Tất cả các mặt bên của hình chóp nghiêng như nhau so với mặt đáy. Đáy của hình chóp là tam giác cân có góc ở đỉnh bằng α. Tính tỉ số thể tích giữa hình nón và hình chóp.

Đáp án

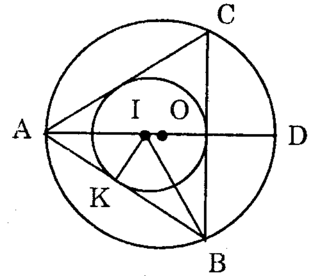


- Gọi S và O lần lượt là đỉnh và tâm mặt đáy của hình nón, S'.ABC là hình chóp như đã nói ở đề bài, với tam giác ABC cân tại A. Gọi AD là đường kính của đường tròn đáy. Rõ ràng BC ⊥ AD. *0,5đ*
- Vẽ S'I ⊥ (ABC) thì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên I ∈ AD. Để ý rằng (SAD) là mặt phẳng đối xứng của cả hình nón lẫn hình chóp nên S' phải nằm trên SD hoặc SA. *0,5đ*

* Nếu S' ∈ SD, ta có I ∈ OD nên $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$

* Nếu S' ∈ SA, ta có I ∈ OA nên $\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \pi$ *0,5đ*

- Gọi V và V_1 lần lượt là thể tích của hình nón và hình chóp. R là bán kính của đường tròn đáy và h, h′ tương ứng là chiều cao của hình nón và hình chóp, ta có



$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h. \qquad \textit{0,5đ}$$

- $V_1 = \frac{1}{3}h'\, S_{ABC} = \frac{1}{3}h'.\frac{1}{2}AB^2\sin\alpha = \frac{1}{6}h'\left(2R\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2\sin\alpha.$

$\Leftrightarrow V_1 = \frac{2}{3}h'.R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha.$ *0,5đ*

- Từ đó $\frac{V_1}{V} = \frac{2}{\pi}\cos^2\frac{\alpha}{2}.\sin\alpha.\frac{h'}{h}.$

Vì IK // BD nên $\widehat{BIH} = \widehat{BIK} = \widehat{IBD}$, suy ra ΔDIB cân tại D.

Do đó: $DI = DB = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$. *0,5đ*

- Như vậy:

* Nếu $I \in OD$ hay $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ thì $\frac{h'}{h} = \frac{ID}{OD} = 2\sin\alpha$

và $\frac{V_1}{V} = \frac{4}{\pi}\cos^2\frac{\alpha}{2}.\sin\alpha.\sin\frac{\alpha}{2}.$ *0,5đ*

* Nếu $I \in OA$ hay $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$ thì

$$\frac{h'}{h} = \frac{AI}{AO} = \frac{2R\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2R} = 2\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right) \text{ và:}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{4}{\pi}\cos^2\frac{\alpha}{2}.\sin\alpha.\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right). \qquad \textit{0,5đ}$$

Câu 4: *(3 điểm)*

Cho $x \in [-1; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$f(x) = \sqrt{2}x^5 + \sqrt{4-2x^2} + x^3\sqrt{2-x}$$

Đáp án

* Xét $x \in [0; 1]$, ta có: $x^5 \le x$ và $x^3 \le \sqrt{x}$, *0,5đ*

Suy ra:

$$\sqrt{2}x^5 + \sqrt{4-2x^2} \le \sqrt{2}x + \sqrt{4-2x^2} \le \sqrt{(1+1)(2x^2+4-2x^2)} = 2$$

(BĐT Bunhiacopski) *0,5đ*

$$x^3\sqrt{2-x} + \sqrt{x}\sqrt{2-x} \le \frac{\sqrt{x^2} + (\sqrt{2-x})^2}{2} = 1$$

(Do BĐT: $\forall a, b \in R$: $ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$) *0,5đ*

Vậy $f(x) \le 1 + 2\sqrt{2}$. *0,5đ*

* Xét $x \in [-1; 0]$, ta có: $x^5 \le 0$, $x^3 \le 0$.

Suy ra: $f(x) \le \sqrt{4-2x^2} \le \sqrt{4} = 2 < 1 + 2\sqrt{2}$. *0,5đ*

Tóm lại: $f(x) \le 1 + 2\sqrt{2}$, $\forall x \in [-1; 1]$ và ta có $f(1) = 1 + 2\sqrt{2}$.

Vậy $\max f(x) = 1 + 2\sqrt{2}$. *0,5đ*

Câu 5: *(4 điểm)*

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})u_n = \frac{2}{2n+1};\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Chứng minh: $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{2008} < \dfrac{1004}{1005}$, $\forall k \in N$.

Đáp án

Ta có: $u_k = \dfrac{2}{(2k+1).(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} = \dfrac{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{(2k+1)}$

$\Rightarrow u_k < \dfrac{2((\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{2\sqrt{k(k+1)}}$ do $\sqrt{k(k+1)} < \dfrac{k + (k+1)}{2} = \dfrac{2k+1}{2}$ *0,5đ*

$\Rightarrow u_k < \dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ *0,5đ*

Do đó:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k < (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) + (\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}) + \ldots + (\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}})$$ *0,5đ*

$\Rightarrow u_1 + u_2 + \ldots + u_k < 1 - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ *0,5đ*

Vì $1 - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{4k+4}} < 1 - \dfrac{2}{\sqrt{k^2+4k+4}}$

$= 1 - \dfrac{2}{k+2} = \dfrac{k}{k+2}$ *0,5đ*

Như vậy ta đi đến: $\Rightarrow u_1 + u_2 + ... + u_k < \dfrac{k}{k+2}$. Thay k = 2008 ta có điều phải chứng minh. *0,5đ*

Câu 6: *(3 điểm)*

Tìm mọi đa thức P(x) không đồng nhất không thỏa điều kiện:

$$\begin{cases} xP(x-1) = (x-3)P(x), \ \forall x. \\ P(3) = 6 \end{cases}$$

Đáp án

Giả sử P(x) là đa thức thỏa điều kiện:

$xP(x - 1) = (x - 3)P(x), \forall x$ (1) (1)

Trong (1) lần lượt thay:

x = 0: $-3P(0) = 0$ nên $P(0) = 0$.

x = 1: $P(0) = -2P(1)$ nên $P(1) = 0$

x = 2: $2P(1) = -P(2)$ nên $P(2) = 0$. *1đ*

Vậy P(x) nhận $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ làm nghiệm. Theo định lí Bezout thì P(x) có dạng:

$P(x) = x(x - 1)(x - 2)Q(x)$, với Q(x) là đa thức nào đó. *0,5đ*

Từ đó thay vào (1), ta có:

$x(x - 1)(x - 2)(x - 3)Q(x - 1) = (x - 3)x(x - 1)(x - 2)Q(x), \forall x$

Suy ra:

$Q(x - 1) = Q(x), \forall x$ (2). *0,5đ*

Hệ thức (2) chứng tỏ Q(x) là hàm tuần hoàn. Q(x) là đa thức mà lại là hàm tuần hoàn nên:

$Q(x) \equiv C$, với C là hằng số. *0,5đ*

Vậy $P(x) = Cx(x - 1)(x - 2)$, dựa vào P(3) = 6 suy ra C = 1.

Vậy $P(x) = x(x - 1)(x - 2)$.

Thử lại thấy $P(x) = x(x - 1)(x - 2)$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

0,5đ

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN LỚP 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUANG TRUNG – BÌNH PHƯỚC

Câu 1: *(4 điểm)*

Cho a, b, c > 0. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} ax - by + \dfrac{1}{xy} = c & (1) \\ bz - cx + \dfrac{1}{zx} = a & (2) \\ cy - az + \dfrac{1}{yz} = b & (3) \end{cases}$.

Đáp án

Điều kiện: $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Xem a, b, c như là các ẩn, ta có hướng giải quyết như sau:

Nhân phương trình (1) với x ta được: $ax^2 - bxy + \dfrac{1}{y} = cx$ (4).

Thay $cx = bz + \dfrac{1}{zx} - a$ từ (2) vào (4) ta có:

$$a(x^2 + 1) - b(xy + z) = \frac{1}{zx} - \frac{1}{y} \quad (*)$$

Nhân phương trình (1) với y ta được: $axy - by^2 + \dfrac{1}{x} = cy$ (5).

Thay $cy = az - \dfrac{1}{yz} + b$ từ (3) vào (5) ta được:

$$a(xy - z) - b(y^2 + 1) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{yz} \quad (**)$$

Kết hợp (*) và (**) ta được:

$$\begin{cases} a(x^2 + 1) - b(xy + z) = \dfrac{1}{zx} - \dfrac{1}{y} & \text{(i)} \\ a(xy - z) - b(y^2 + 1) = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{yz} & \text{(ii)} \end{cases}$$

Nhân phương trình (i) với $y^2 + 1$ và (ii) với $-(xy + z)$ rồi cộng lại ta được:

$$a(x^2 + y^2 + z^2 + 1) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 1}{xz} \Rightarrow a = \frac{1}{xz}$$

Tương tự ta có $b = \dfrac{1}{yz}, c = \dfrac{1}{zx} \Rightarrow abc = \dfrac{1}{(xyz)^2} \Rightarrow xyz = \pm\dfrac{1}{\sqrt{abc}}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$$(x, y, z) = \left(\frac{b}{\sqrt{abc}}; \frac{a}{\sqrt{abc}}; \frac{c}{\sqrt{abc}}\right) = \left(-\frac{b}{\sqrt{abc}}; -\frac{a}{\sqrt{abc}}; -\frac{c}{\sqrt{abc}}\right).$$

Câu 2: *(4 điểm)*

Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $x_1 = 1; x_{n+1} = \dfrac{x_n^{2008}}{2008} + x_n$, với n là số nguyên dương. Tìm giới hạn của dãy số sau:

$$u_n = \frac{x_1^{2007}}{x_2} + \frac{x_2^{2007}}{x_3} + \frac{x_3^{2007}}{x_4} + \cdots + \frac{x_n^{2007}}{x_{n+1}}.$$

Đáp án

Ta có: $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^{2008}}{2008}, \forall\, n \geq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{x_n^{2007}}{2008.x_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{2007}}{x_{i+1}} = 2008.\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) = 2008\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}}\right)$$

Mặt khác: $x_{n+1} - x_n \geq 0 \Rightarrow \{x_n\}$ là dãy số tăng $\forall\, n \geq 1$. Nếu $\{x_n\}$ bị chặn thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ tồn tại.

Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow a \geq 1$ và $a = \dfrac{a^{2008}}{2008} + a$ (vô lý). Suy ra $\{x_n\}$ bị chặn trên $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_{n+1}} = 0$

Vậy: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^{2007}}{x_{i+1}} = 2008.$

Câu 3: *(4 điểm)*

Tìm tất cả các đa thức P(x) với hệ số thực thỏa mãn đẳng thức:

$P(a + b) = P(a) + 7P(b)$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $ab(a + b) = 2b^3$.

Đáp án

Phương trình: $ab = (a + b) = 2b^3$ có một nghiệm (1; 1), vậy bộ (x, x) thỏa mãn điều kiện: $ab(a + b) = 2b^3$. Thay vào phương trình ta thu được: $P(2x) = 8P(x) \Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{n} a_i.2^i.x^i = 8\sum\limits_{i=0}^{n} a_i.x^i$, trong đó: $P(x)=\sum_{i=1}^{n} a^i x_i$.

Suy ra: $a_i.(2^i - 8) = 0$, với $i \neq 3 \Rightarrow a_i = 0 \Rightarrow P(x) = kx^3, k \in \mathbb{R}$

Thử lại ta có: $k(a + b)^3 = ka^3 + 7kb^3 \Leftrightarrow (a + b)^3 = a^3 + 7b^3$ (đúng).

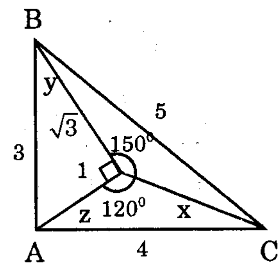
Vậy tất cả các đa thức cần tìm: $P(x) = kx^3, k \in \mathbb{R}$.

Câu 4: *(4 điểm)*

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn: $\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 25 \\ \dfrac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + zx + x^2 = 16 \end{cases}$

Tính giá trị của biểu thức sau: $P = xy + 2yz + 3zx$.

Đáp án



Dựng tam giác ABC và điểm I nằm trong tam giác như hình vẽ

Ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta IAB} + S_{\Delta IBC} + S_{\Delta IAC}$

$$= \frac{1}{2}IA.IB + \frac{1}{2}IB.IC.\sin 150^0 + \frac{1}{2}IA.IC.\sin 120^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}3.4 = \frac{1}{2}.\frac{y}{\sqrt{3}}.z + \frac{1}{2}.\frac{y}{\sqrt{3}}.x.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.x.z.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6 = \frac{1}{4\sqrt{3}}.2yz + \frac{1}{4\sqrt{3}}xy + \frac{1}{4\sqrt{3}}.3zx$$

Hay: $24\sqrt{3} = xy + 2yz + 3zx$. Vậy $P = 24\sqrt{3}$.

Câu 5: *(4 điểm)*

Cho tứ diện ABCD, các cạnh DB và DC vuông góc với nhau, đường vuông góc hạ từ D xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC. Chứng minh: $(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + DB^2 + CD^2)$.

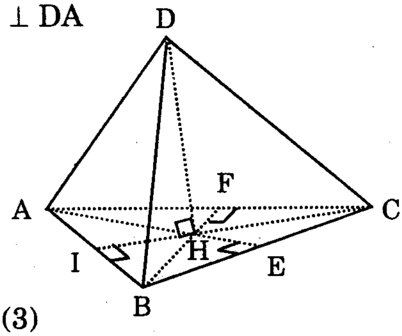
Đáp án

Ta có $DH \perp (ABC) \Rightarrow DH \perp AB$ (1)

• H là trực tâm ΔABC nên suy ra $CH \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB \perp (CDH) \Rightarrow AB \perp CD$

Mà $DB \perp CD$ $\Rightarrow CD \perp (ABD) \Rightarrow CD \perp DA$



• Chứng minh tương tự $DB \perp DA$

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

Ta có: $BC^2 = BD^2 + CD^2$

Suy ra $CA^2 = CD^2 + AD^2$

$$AB^2 + BC^2 + CA^2$$

$$= 2(AD^2 + BD^2 + CD^2) \qquad (3)$$

• Mặt khác:

$$2AB.BC = 2\sqrt{AD^2 + BD^2}.\sqrt{BD^2 + CD^2}$$

$$\le (AD^2 + BD^2) + (BD^2 + CD^2) = AD^2 + 2BD^2 + CD^2$$

• Tương tự: $2AB.CA \le 2AD^2 + BD^2 + CD^2$

$$2BC.CA \le AD^2 + BD^2 + 2CD^2$$

Suy ra: $2(AB.BC + BC.CA + CA.AB) \le 4(AD^2 + BD^2 + CD^2)$ (4)

• Từ (3) và (4): $(AB + BC + CA)^2 \le 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$

• Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow AB = BC = CA \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow$ DH là trục $\Delta ABC \Rightarrow$ D.ABC là hình chóp tam giác đều có 3 góc ở đỉnh vuông.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRÀ VINH – TỈNH TRÀ VINH

Câu 1: *(3 điểm)*

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 - 2\right) = 6\ln\left(\dfrac{y + \sqrt{y^2 + 9}}{x + \sqrt{x^2 + 9}}\right) & (1) \\ x^3 - 2x + 1 = y^2 & (2) \end{cases}$$

Đáp án

$(1) \Leftrightarrow x^3 - 2x + 6\ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) = y^3 - 2y + 6\ln(y + \sqrt{y^2 + 9})$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t + 6\ln(t + \sqrt{t^2 + 9})$; $t \in R$

$$f'(t) = 3t^2 - 2 + \frac{6}{\sqrt{t^2 + 9}} = 3\left(t^2 + \frac{2}{\sqrt{t^2 + 9}} - \frac{2}{3}\right)$$

Theo bất đẳng thức Cô–si:

$$\frac{t^2 + 9}{27} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9}} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9}} + \frac{26}{27}\left(t^2 + 9\right)$$

$$\geq 1 + \frac{26}{27}\left(t^2 + 9\right) \geq 1 + \frac{26}{27} \cdot 9 = \frac{29}{3}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + \frac{2}{\sqrt{t^2 + 9}} - \frac{2}{3} \geq 0$$

$\Rightarrow f'(t) \geq 0, \forall t \in R$ (Dấu "=" xảy ra khi $t = 0$)

$\Rightarrow$ Hàm số f(t) đồng biến trên R. Do đó:

(*) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$, thế vào (2):

$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ (3) *1đ*

Xét hàm số $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ liên tục trên các đoạn $[-2; 0]$; $[0; 1]$; $[1; 2]$ và:

$f(-2).\ f(0) < 0 \Rightarrow$ (3) có nghiệm $x_1 \in (-2; 0)$

$f(0).\ f(1) < 0 \Rightarrow$ (3) có nghiệm $x_2 \in (0; 1)$

$f(1).\ f(2) < 0 \Rightarrow$ (3) có nghiệm $x_3 \in (0; 2)$

Vậy (3) có ít nhất 3 nghiệm trên $(-2; 2)$

Vậy (3) là phương trình bậc ba có không quá 3 nghiệm trên R nên (3) có đúng 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 và $x_1, x_2, x_3 \in (-2; 2)$ *1đ*

• Gọi x là nghiệm của (3) $\Rightarrow -2 < x < 2$

$\Rightarrow \exists u \in (0;\pi)$ sao cho $x = 2\cos u$. Thế vào (3)

$8\cos^3u - 4\cos^2u - 4\cos u + 1 = 0$ (nhân sinu > 0)

$\Leftrightarrow 8\sin u.\cos^3u - 4\sin u.\cos^2u - 4\sin u.\cos u + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 4u = \sin u \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = k2\pi \ (k \in z) \\ u = \dfrac{\pi}{7} + k\dfrac{2\pi}{7} \end{array}\right.$$

Vì $u \in (0; \pi)$ nên ta được: $u = \dfrac{\pi}{7}$; $u = \dfrac{3\pi}{7}$; $u = \dfrac{5\pi}{7}$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x = y = 2\cos\dfrac{\pi}{7} \\ x = y = 2\cos\dfrac{3\pi}{7} \\ x = y = 2\cos\dfrac{5\pi}{7} \end{array}\right.$$

Câu 2: (*3 điểm*)

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$1! + 2! + 3! + ... + (x + 1)! = y^{z+1} \qquad (1)$$

Trong đó x, y, z là các số nguyên dương.

Đáp án

Đặt $f(x) = 1! + 2! + 3! + ... + (x + 1)!$

$f(1) = 3$; $f(2) = 9$; $f(3) = 33$

* Với $x > 3$: ta có $f(x) = f(3) + 5! + ... + (x + 1)!$

Vì $5!, 6!, ..., (x + 1)!$ Đều chia hết cho 10 nên ta suy ra:

$f(x) \equiv f(3) \pmod{10}$

$\Rightarrow f(x) \equiv 3 \pmod{10}$ (vì $f(3) = 33$)

Vậy f(x) không phải là bình phương của 1 số nguyên.

Suy ra với z = 1, phương trình (1) không có nghiệm nguyên dương với $x \geq 3$.

* Xét z = 1; x < 3: dễ thấy x = 2; y = 3; z = 1 thỏa (1). Vậy (1) có nghiệm (2; 3; 1) *1đ*

* Xét $z \geq 2$ (z nguyên dương) $\Rightarrow z + 1 \geq 3$

(1) $\Leftrightarrow f(x) = y^{z+1}$

Với x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 thì khi thử trực tiếp ta thấy $f(x) \vdots 3$ nhưng $f(x) \not\vdots\, 27$

Mặt khác do $f(x) = y^{z+1} \Rightarrow y^{z+1} \vdots 3$

$$\Rightarrow y \vdots 3 \Rightarrow y^{z+1} \vdots y^3 \Rightarrow y^{z+1} \vdots 27$$

Vậy (1) vô nghiệm trong trường hợp này. *1đ*

* Với x > 7:

$$f(x) = f(7) + 9! + \ldots (x+1)! \equiv f(7) (\text{mod } 27)$$

Mà $f(7) \not\vdots\, 27 \Rightarrow f(x) \not\vdots\, 27$. Do $f(x) \vdots 3$

$$\Rightarrow y^{z+1} \vdots 3 \Rightarrow y \vdots 3 \Rightarrow y^3 \vdots 27$$

Mặt khác $y^{z+1} \vdots y^3 \Rightarrow y^{z+1} \vdots 27$

Vậy: (1) không có nghiệm nguyên dương trong trường hợp này.

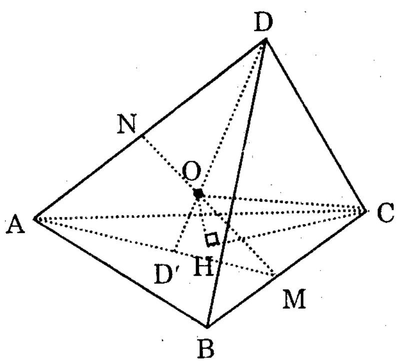
Tóm lại: (1) có nghiệm duy nhất.

x = 2; y = 3; z = 1. *1đ*

Câu 3: *(4 điểm)*

Cho tứ diện ABCD có AB = CD; AC = BD; AD = BC. Gọi R, r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện ABCD; R_0, r_0 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\sqrt{3(R^2 - 3r^2)} \geq R_0 + r_0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Đáp án



Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, AD và O là trung điểm MN thì O là trọng tâm tứ diện ABCD. Gọi D′ là trọng tâm ΔABC. Kẻ OH ⊥ (ABC) tại H.

• ΔABD = ΔACD (C.C.C) ⇒ BN = CN.

⇒ ΔBCN cân tai C ⇒ MN ⊥ BC

Tương tự MN ⊥ AD

Vậy MN là trung trực của BC và AD. Mà O là trung điểm MN

⇒ O là tâm mặt cầu ngoại tiếp ABCD.

Mặt khác:

$$\text{Do } \begin{cases} AB = CD \\ CA = BD \\ AD = BC \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta BCD = \Delta CDA = \Delta ADB \text{ (c.c.c)}$$

Đặt $S_{ABC} = S_{BCD} = S_{CDA} = S_{ADB} = S$

$V = V_{ABCD}$, ta có: $\dfrac{V_{OABC}}{V_{ABCD}} = \dfrac{OD'}{DD'} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{OABC} = \dfrac{V}{4}$

$$\Rightarrow d(O; ABC) = \frac{3V_{OABC}}{S_{ABC}} = \frac{3V}{4S}$$

Tương tự: $d(O, BCD) = d(O; CDA) = d(O; ADB) = \dfrac{3V}{4S}$.

Vậy O là tâm mặt cầu nội tiếp ABCD *1đ*

Suy ra: $OH = r$ và $OD = R$; $OD' = \dfrac{R}{3}$

Ta lại có: $OD' \geq OH \Leftrightarrow \dfrac{R}{3} \geq r$

$\Leftrightarrow R \geq 3r$ (1). Do $OA = OB = OC$

$\Rightarrow HA = HB = HC \Rightarrow$ H là tâm đường tròn (ABC) $\Rightarrow HC = R_0$

- $OC^2 = OH^2 + HC^2 \Leftrightarrow R^2 = r^2 + R_0^2$

$\Leftrightarrow R_0^2 = R^2 - r^2$ (2) *1đ*

Từ (1), (2) suy ra: $4R^2 - 12r^2 \geq 3R^2 - 3r^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{R^2 - 3r^2} \geq \sqrt{3(R^2 - r^2)} = R_0\sqrt{3}$.

Mà $R_0 \geq 2r_0 \Leftrightarrow r_0 \leq \dfrac{R_0}{2}$

Vậy: $\dfrac{R_0 + r_0}{\sqrt{R^2 - 3r^2}} \leq \dfrac{3R_0}{2\sqrt{R^2 - 3r^2}} \leq \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3(R^2 - 3r^2)} \geq R_0 + r_0$

Đẳng thức xảy ra khi ABCD là tứ diện đều. *2đ*

Câu 4: *(3 điểm)*

Cho tam giác ABC có số đo các góc tính bằng radian. Chứng minh rằng:

$$\frac{A\,.\,B}{\cos^2\frac{A}{4}\cos^2\frac{B}{4}} + \frac{B\,.\,C}{\cos^2\frac{B}{4}\cos^2\frac{C}{4}} + \frac{C\,.\,A}{\cos^2\frac{C}{4}\cos^2\frac{A}{4}} < 4$$

Đáp án

Xét hàm số $f(x) = tgx + \sin x - 2x$ với $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x - 2 \overset{\text{côsi}}{\geq} \sqrt{\frac{1}{\cos x}} > 0$$

$\Rightarrow$ f(x) đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Do đó: $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$

$\Rightarrow tgx + sinx - 2x > 0$ *1đ*

Suy ra: $tg\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} - A > 0$

$\Rightarrow tg\frac{A}{2}\left(1 + \cos\frac{A}{2}\right) > A$

$\Rightarrow \dfrac{A}{\cos^2\frac{A}{4}} < 2tg\frac{A}{2}$

Tương tự: $\dfrac{B}{\cos^2\frac{B}{4}} < 2tg\frac{B}{2}$; $\dfrac{C}{\cos^2\frac{C}{4}} < 2tg\frac{C}{2}$ *1đ*

Từ đó: $\dfrac{A.B}{\cos^2\frac{B}{4}\cdot\cos^2\frac{C}{4}} + \dfrac{BC}{\cos^2\frac{B}{4}\cdot\cos^2\frac{C}{4}} + \dfrac{C.A}{\cos^2\frac{C}{4}\cdot\cos^2\frac{A}{4}} <$

$< 4\left(tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}\right)$ *(1)*

Mặt khác: $A + B + C = \pi$

$\Rightarrow cotg\frac{C}{2} = tg\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{tg\frac{C}{2}} = \dfrac{tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2}}{1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}}$

$\Rightarrow tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2} = 1$ (2)

Từ (1), (2) suy ra điều phải chứng minh. *1đ*

Câu 5: *(4 điểm)*

Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(1)^{k-1}}{k} \quad (n \in N^*)$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn khi $n \to +\infty$ và tính giới hạn đó.

Đáp án

Ta có:

- $u_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}$ $(m \in N^*)$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2m}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2m}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m+k} \quad \textit{1đ}$$

- Ta chứng minh: $\ln(1 + x) < x < -\ln(1 - x)$; $x \in (0; 1)$
- Xét hàm số $f(x) = x - \ln(1 + x)$; $x \in (0; 1)$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0,\ \forall x \in (0; 1)$$

$\Rightarrow$ Hàm $f(x)$ đồng biến trên $(0; 1)$

Do đó $x > 0$ x $\Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow x - \ln(1 + x) > 0. \Rightarrow x > \ln(1 + x)$

Xét hàm số $g(x) = x + \ln(1 - x)$; $x \in (0; 1)$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0,\ \forall x \in (0; 1)$$

$\Rightarrow$ Hàm $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 1)$

Do đó $x > 0 \Rightarrow g(x) < g(0) \Rightarrow x + \ln(1 - x) < 0 \Rightarrow x < -\ln(1 - x)$

Vậy: $\ln(1 + x) < x < -\ln(1 - x)$, $\forall x \in (0; 1)$ (*)

Áp dụng (*) với $x = \frac{1}{m+k}(k = 1; 2, ..., m)$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{m+1}\right) < \frac{1}{m+1} < -\ln\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{m+2}\right) < \frac{1}{m+2} < -\ln\left(1 - \frac{1}{m+2}\right)$$

...

$$\ln\left(1 + \frac{1}{m+m}\right) < \frac{1}{m+m} < -\ln\left(1 - \frac{1}{m+m}\right)$$

Cộng vế với các bất đẳng thức trên ta được:

$$\ln\frac{2m+1}{m+1} < u_{2m} < \ln 2$$

Vì $\lim\limits_{m \to +\infty} \left(\ln\frac{2m+1}{m+1}\right) = \ln 2$ nên $\lim\limits_{m \to +\infty} u_m = \ln 2$ (1) *1đ*

Mặt khác:

$$(*)\, u_{2m-1} = \sum_{k=1}^{2m-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{(-1)^{2m-1}}{2m}.$$

$$\Rightarrow u_{2m-1} = u_{2m} + \frac{1}{2m}$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to+\infty} u_{2m-1} = \lim_{m\to+\infty}\left(u_{2m} + \frac{1}{2m}\right) = \ln 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$ *1đ*

Câu 6: (*3 điểm*)

Tìm tất cả các hàm số liên tục: f: R → R thỏa mãn điều kiện:

$$\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 = f(x).f(y);\ \forall x;\ y \in R \qquad (1)$$

Đáp án

+ Ta thất $f(x) = 0$, $\forall x \in R$ thỏa mãn đề bài.

+ Xét hàm số $f(x) \neq 0$:

Giả sử $\exists\, x_0 \in R$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Thế $x = x_0$ và $y = 2x - x_0$; $\forall x \in R$ vào (1):

$[f(x)]^2 = 0,\ \forall x \in R \Rightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in R$ vô lí

Vậy $f(x) \neq 0,\ \forall x \in R$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \forall x \in R \\ f(x) < 0, \forall x \in R \end{array}\right.$$

Thật vậy nếu tồn tại a, b ∈ R, a < b sao cho f(a) < 0 và f(b) < 0 ⇒ f(a).f(b) < 0 và do f liên tục nên tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $f(x_0) = 0$: vô lí.

Vậy $f(x) > 0,\ \forall x \in R$ hoặc $f(x) < 0,\ \forall x \in R$

+ Nếu $f(x) > 0,\ \forall x \in R$ *1đ*

Xét hàm số $g(x) = \ln f(x) - \ln f(0)$ liên tục trên R và $g(0) = 0$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \ln\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 = \ln\left[f(x)\cdot f(y)\right],\ \forall x, y \in R$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 = \ln f(x) + \ln f(y)$$

$$\Leftrightarrow 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) = g(x) + g(y)$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}$$ và g liên tục trên R

$\Rightarrow g(x) = ax + b$

Mà $g(x) = 0 \Rightarrow b = 0$

Vậy $g(0) = ax$

$\Leftrightarrow \ln f(x) - \ln f(0) = ax$ (Đặt $\ln f(0) = c$)

$\Leftrightarrow \ln f(x) = ax + c \Rightarrow f(x) = e^{ax+c}$

* Nếu $f(x) < 0, \forall x \in R$ lập luận tương tự ta được $f(x) = -e^{ax+c}, \forall x$, $x \in R$

Thử lại ta thấy các hàm số trên thỏa đề bài.

Vậy $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \quad \forall x \in R \\ f(x) = e^{ax+c} \\ f(x) = -e \end{array}\right.$ *2đ.*

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 11

TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG – GIA LAI

Câu 1:

Giả sử a, b là hai số thực thỏa mãn:

$A^3 - 3a^2 + 5a - 2008 = 0$ và $b^3 - 3b^2 + 5b + 2002 = 0$. Tính a + b.

Đáp án

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x = (x-1)^3 + 2(x-1) + 3$

Ta có: $f(a) = 2008; f(b) = -2002$

$f(a) - 3 = (a-1)^3 + 2(a-1).$

$f(b) - 3 = (b-1)^3 + 2(b-1).$

Cộng vế theo vế 2 đẳng thức ta có:

$$f(a) + f(b) - 6 = (a-1)^3 + 2(a-1) + (b-1)^3 + 2(b-1).$$

$$\Leftrightarrow 0 = (a-1)^3 + (b-1)^3 + 2(a+b-2).$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2)[(a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 + 2].$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2)\{[a-1+\frac{1}{2}(b-1)]^2 + \frac{3}{4}(b-1)^2 + 2\} = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b - 2 = 0$$

Vậy: $a + b = 2$

Câu 2:

Tìm số các dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} u_{2008} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4}u_{n+1} = u_n - u_n^2 \quad \forall n \ge 1 \end{cases}$$

Đáp án

Viết lại $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n) = f(u_n)$ với $f(x) = 4x(1-x)$

Nhận xét: $f(x) \in (0; 1) \Rightarrow x \in (0; 1)$.

Vì vậy: $u_{2008} = \dfrac{1}{2} \in (0; 1) \Rightarrow u_{2007} \in (0; 1)$

$\Rightarrow u_{2006} \in (0; 1) \Rightarrow \ldots u_1 \in (0; 1).$

- Với $0 < u_1 < 1$ tồn tại duy nhất α: $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ và $u_1 = \sin^2\alpha$. *1đ*

Lúc đó: $u_2 = 4\sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) = \sin^2 2\alpha$;

$u_3 = 4\sin^2 2\alpha(1 - \sin^2 2\alpha) = \sin^2 4\alpha$.

Quy nạp ta được: $u_n = \sin^2(2^{n-1}\alpha) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2^n\alpha)\right)$

• $u_{2008} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2^{2008}\alpha) = \frac{1}{2}$ *1,5đ*

$\Leftrightarrow \cos(2^{2008}\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2^{2008}\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2^{2009}}(2k+1)$; $k \in Z$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $0 \le \frac{\pi}{2^{2009}}(2k+1) \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 2^{2007} - \frac{1}{2}$

Do $k \in Z$ nên: $k = 0; 1; 2;...; 2^{2007} - 1$.

Từ đó có tất cả 2^{2007} giá trị u_1 thỏa bài toán:

$$u_1 = \sin^2\left[\frac{\pi}{2^{2009}}(2k+1)\right]; k = 0; 1; 2;...; 2^{2007} - 1.$$

Do đó có tất cả 2^{2007} dãy số (u_n) thỏa điều kiện đã cho.

Câu 3:

Tìm tất cả các hàm số f: $R \to R$ sao cho:

$$f(f(x - y)) + xy = f(x) - f(y) + f(x).f(y) \ \forall x, y \in R$$

Đáp án

Tìm tất cả các hàm số f: $R \to R$ sao cho:

$$f(f(x-y)) + xy = f(x) - f(y) + f(x).f(y) \ \ \forall x, y \in R$$

Giải: Đặt $f(0) = k$, cho $x = y = k$ ta được $f(k) = (f(k))^2 - k^2$ (1)

Cho $x = y = 0$ ta có $f(k) = k^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $k^2 = k^4 - k^2 \Rightarrow k^2(k^2 - 2) = 0$.

Lại cho $x = k$; $y = 0$ ta có: $f(f(k)) = f(k) - a + k\,f(k) = k^3 + k^2 - k$.

thay $x = y = f(k)$ ta có: $f(k) = (f(f(k)))^2 - (f(k))^2$

$\Rightarrow (f(f(k)))^2 = (f(k))^2 + f(k) = k^4 + k^2$.

Như vậy ta có hệ như sau: $\begin{cases} k^2(k^2 - 2) = 0 \\ (k^3 + k^2 - k)^2 = k^4 + k^2 \end{cases}$

Giải hệ trên ta có nghiệm duy nhất $k = 0$. Vậy $f(0) = 0$.

– Thay $y = 0$ vào ta được $f(f(x)) = f(x)\ \forall x \in R$ như thế ta có

$$f(x - y)) = f(x) - f(y) + f(x).f(y) - xy \ \ \forall x, y \in R \quad (3)$$

– Thay $x = 0$ hệ thức trở thành $f(-y) = -f(y)\ \forall y \in R \Rightarrow$ f là hàm số lẻ.

Mặt khác: thay x = y vào (3) ta có $(f(k))^2 - x^2 = 0$

$$\Rightarrow (f(x))^2 = x^2 \ \forall x \in R \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x \\ f(x) = -x \end{array}\right.$$

Nhận xét rằng nếu có x mà $f(x) = 0$ thì $x^2 = (f(x))^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Vậy: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Giả sử $x \neq 0$ mà $f(x) = -x$. Khi đó $f(-x) = f(f(x)) = f(x)$

$$\Rightarrow -f(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ vô lý}$$

Thử lại: $f(x) = x$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy: hàm số cần tìm là $f(x) = x$ với mọi x thuộc R

Câu 4:

Cho hình chóp $S.A_1A_2... A_n$ $(n > 2)$. Đáy $A_1A_2... A_n$ có tất cả các cạnh bằng 1, góc $SA_1A_2 = SA_2A_3 = ... = SA_nA_1 = 60^0$. Chứng minh $S.A_1A_2... A_n$ là hình chóp đều.

Đáp án

* Chứng minh rằng các cạnh bên bằng nhau

Đặt: $SA_1 = x_1$; $SA_2 = x_2$;...; $SA_n = x_n$.

Dùng định lý cosin trong các tam giác $S.A_1A_2$; $S.A_2A_3$;...; $S.A_nA_1$ ta có:

$$x_2^2 = 1 + x_1^2 - 2x_1\cos 60^0 = 1 + x_1^2 - x_1$$

$$x_3^2 = 1 + x_2^2 - 2x_2\cos 60^0 = 1 + x_2^2 - x_2$$

....

$$x_n^2 = 1 + x_{n-1}^2 - 2x_{n-1}\cos 60^0 = 1 + x_{n-1}^2 - x_{n-1}$$

$$x_1^2 = 1 + x_n^2 - 2x_n\cos 60^0 = 1 + x_n^2 - x_n$$

• Đặt $f(x) = x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, ta có hệ: $\begin{cases} x_2^2 = f(x_1) \\ x_3^2 = f(x_2) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n^2 = f(x_{n-1}) \\ x_1^2 = f(x_n) \end{cases}$

Với $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$

Trên $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$ f(x) đồng biến.

Do đó: $x_1 \neq x_2$ thì vô lý.

Thật vậy: nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$\Rightarrow x_2^2 < x_3^2 \Rightarrow x_2 < x_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_n < x_1$. Ta có $x_1 < x_1$ (vô lý)

Tương tự nếu $x_1 > x_2$ cũng suy ra điều vô lý: $x_1 > x_1$. Vậy $x_1 = x_2$.

Do $x_1 = x_2$ ta được $x_1^2 = x_1^2 - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 = 1$. Từ đó ta được:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1.$$

• Chứng minh đáy $A_1A_2\ldots A_n$ là đa giác đều

Từ $SA_1 = SA_2 = \ldots = SA_n = 1$ suy ra hình vuông góc H của S lên đáy cách đều các đỉnh của đáy đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ có các cạnh bằng nhau và nội tiếp trong một đường tròn nên là đa giác đều.

Vậy: $S.A_1A_2\ldots A_n$ là hình chóp đều.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN LỚP 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT – KIÊN GIANG

Câu 1:

Tìm m để phương trình: $\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{1+2\sin x}=m$ (1) có nghiệm.

Đáp án

Ta chỉ cần xét nghiệm trên $[-\pi;\pi]$ (một vòng đường tròn lượng giác)

Điều kiện: $\begin{cases}2\cos x+1\geq 0\\2\sin x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{6}\leq x\leq\dfrac{2\pi}{3}$ ***0,5đ***

Ta có (1)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\2+2(\sin x+\cos x)+2\sqrt{1+2\cos x}\sqrt{1+2\sin x}=m^2\ (*)\end{cases}$$ ***0,5đ***

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ với $-\dfrac{\pi}{6}\leq x\leq\dfrac{2\pi}{3}$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{3}-1}{2}\leq t\leq\sqrt{2}$$ ***0,5đ***

từ cách đặt có: $t^2=1+2\sin x\cos x$

$(*)\Leftrightarrow 2+2t+2\sqrt{2t^2+2t-1}=m^2$

Xét hàm số: $f(t)=2t+2+2\sqrt{2t^2+2t-1}$,

$$f'(t)=2+\frac{4t+2}{\sqrt{2t^2+2t-1}}>0\ \forall t\in\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2};\sqrt{2}\right]$$ ***0,5đ***

Bảng biến thiên: ***0,5đ***

t	$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		+	
$F(t)$	$\sqrt{3}+1$	$\nearrow$	$4(\sqrt{2}+1)$

Từ bảng biến thiên ta có kết luận:

Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \sqrt{3}+1 \le m^2 \le 4\left(\sqrt{2}+1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{3}+1} \le m \le 2\sqrt{\sqrt{2}+1} \quad \textit{0,5đ}$$

Câu 2:

Cho 2003 số tự nhiên lập thành một cấp số cộng với công sai bằng 2008. Chứng minh rằng có một và chỉ một số hạng của cấp số cộng chia hết cho 2003.

Đáp án

Giả sử cấp số cộng đó là a, a + 2008, a + 2.2008, ..., a + 2002.2008 (a ∈ N) *1đ*

Xét hiệu của hai số hạng bất kì H = (m – n).2008

Với $0 \le n < m \le 2002 \Rightarrow 0 \le m - n \le 2002 < 2003$ *1đ*

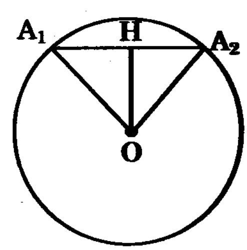
Vì 2003 là số nguyên tố do đó H không chia hết cho 2003, có nghĩa là các số hạng của cấp số cộng khi chia cho 2003 có số dư khác nhau là 0, 1, 2, ..., 2002. *1đ*

Vậy có duy nhất một số hạng của cấp số cộng chia hết cho 2003 (đpcm).

Câu 3:

Cho a_i, $i = \overline{1,2008}$ là độ dài các cạnh của một đa giác lồi, gọi S là diện tích đa giác. Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{2008} a_i^2 \ge 4S\tan\frac{\pi}{2008}$.

Đáp án



Ta chứng minh bài toán trong trường hợp tổng quát đa giác lồi n cạnh.

Xét đa giác lồi đều n cạnh và mọi cạnh của nó là a với

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad \textit{0,5đ}$$

Khi đó đa giác này và đa giác đã cho có cùng chu vi.

Gọi S' là diện tích của đa giác mới, thì

$$S' = n.S_{OA_1A_2} = n\frac{1}{2}A_1A_2.OH = n\frac{1}{2}a.\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n} = \frac{na^2}{4\tan\frac{\pi}{n}} \quad \textit{0,5đ}$$

Theo kết quả quen biết "trong các đa giác lồi có cùng số cạnh và cùng chu vi, thì đa giác đều là đa giác có diện tích lớn nhất" ta có

$$S \le S' \text{ hay } S \le \frac{na^2}{4\tan\frac{\pi}{n}} \Rightarrow 4S\tan\frac{\pi}{n} \le na^2 \quad (1)$$ *1đ*

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, có $n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ge (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2$ hay

$n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ge n^2a^2$ (2) *1đ*

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 4:

Cho x, y, z $\neq 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{x^4 + y^4 + z^4} + \frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{y^2z^2} + \frac{1}{z^2x^2}$

Đáp án

Ta có: $(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)\left(\frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{y^2z^2} + \frac{1}{z^2x^2}\right) \ge 9$

Khi đó: $P = \frac{1}{x^4 + y^4 + z^4} + \frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{y^2z^2} + \frac{1}{z^2x^2}$

$$\ge \frac{1}{x^4 + y^4 + z^4} + \frac{1}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2} + \frac{1}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}$$

$$+ \frac{7}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}$$ *1đ*

$$\ge \frac{3}{\sqrt[3]{(x^4 + y^4 + z^4)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)^2}} + \frac{21}{3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)}$$

$$\ge \frac{3}{\frac{x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)}{3}} +$$

$$\ge \frac{21}{\frac{x^4 + y^4}{2} + \frac{y^4 + z^4}{2} + \frac{z^4 + x^4}{2} + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)}$$

$$\ge \frac{9}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{21}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$\ge 9 + 21 = 30$ (Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) *1đ*

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 = y^2z^2 = z^2x^2 \\ x^4 + y^4 + z^4 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \\ x^2 = y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2 = \dfrac{1}{3}$ ***1đ***

- Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 30 khi $x^2 = y^2 = z^2 = \dfrac{1}{3}$.

Câu 5:

Chứng minh rằng phương trình sau có đúng một nghiệm

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^{2007} - 2\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - x^3 - 3x^2 - 3x - 2 = 0 \quad (1)$$

Đáp án

(1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^{2007} - \left(\sqrt{x+1}\right)^6 - 2\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 1 = 0$ ***0,5đ***

Đặt $t = \sqrt{x+1} \ge 0$, ta có phương trình $t^{2007} - t^6 - 2t^3 - 1 = 0$ (2)

Ta thấy (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm duy nhất $t \ge 0$

(2) $\Leftrightarrow t^{2007} = (t^3 + 1)^2 \ge 0 \Rightarrow t^{2007} \ge 0 \Rightarrow t \ge 0 \Rightarrow t + 1 \ge 1$

$\Rightarrow t^{2007} \ge 1 \Rightarrow t \ge 1$ ***0,5đ***

Xét hàm số $f(t) = t^{2007} - t^6 - 2t^3 - 1$, $t \ge 1$.

Ta có f(t) liên tục trên đoạn $[1; +\infty)$, $f(1) = -3 < 0$, $f(2) = 2^{2007} - 81 > 0$
$\Rightarrow$ phương trình f(t) = 0 có nghiệm $t_0 \in (1; 2)$ ***0,5đ***

Mặt khác $f'(t) = 2007t^{2006} - 6t^5 - 6t^2$

$= 6t^5(t^{2001} - 1) + 6t^2(t^{2004} - 1) + 1995t^{2006} > 0, \forall t \ge 1$ ***0,5đ***

$\Rightarrow$ f(t) đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ $\Rightarrow$ phương trình (2) có nghiệm duy nhất.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất ***1đ***

Câu 6:

Cho hàm số $f(x)$: $R^+ \to R^+$ thỏa mãn điều kiện:

$f(x).f(y) = f(x.y) + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ với $\forall x, y \in R^+$. Tính f(2008).

Đáp án

Thay y = 1 → $f(x).f(1) = f(x) + \frac{1}{x} + 1$ (*) *0,25đ*

Trong (*) thay x = 1 → $f^2(1) - f(1) - 2 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = -1 \\ f(1) = 2 \end{array}\right.$ *0,75đ*

Do $f(x) > 0 \rightarrow f(1) = -1$ loại *0,25đ*

Chọn f(1) = 2 Thay vào (*): $2f(x) = f(x) + \frac{1}{x} + 1$ *0,25đ*

$\rightarrow f(x) = \frac{1}{x} + 1$ *0,25đ*

Thử lại: $f(x).f(y) = (\frac{1}{x} + 1)(\frac{1}{y} + 1) = \frac{1}{xy} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 1$ *0,5đ*

$= f(x.y) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (Đúng) *0,25đ*

Vậy $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ *0,25đ*

$f(2008) = \frac{1}{2008} + 1 = \frac{2009}{2008}$ *0,25đ*

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN LỚP 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT – QUẢNG NGÃI

Câu 1:

1. Cho dãy (a_n) và (b_n) xác định như sau: $a_1 > 0$, $b_1 > 0$ và với n =1, 2, 3,... thì $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n}$, $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n}$. Chứng minh $a_{2008} + b_{2008} > 4\sqrt{1004}$

2. Cho dãy (a_n) xác định $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$ (n số lượng dấu căn) và dãy (U_n) xác định $U_n = (2^n).\sqrt{2-a_n}$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$

Đáp án

1. Đặt $C_n = (a_n + b_n)^2$

$$C_{n+1} = (a_{n+1} + b_{n+1})^2 = \left(a_n + \frac{1}{b_n} + b_n + \frac{1}{a_n}\right)^2$$

$$= \left[(a_n + b_n) + \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)\right]^2 > (a_n + b_n)^2 + 2(a_n + b_n)\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)$$

$$= C_n + 4 + 2\left(\frac{a_n}{b_n} + \frac{b_1}{a_n}\right) \geq C_n + 8$$

$$C_2 = \left(\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) + \left(b_1 + \frac{1}{b_1}\right)\right)^2 \geq 16$$

Mà: $C_3 > C_2 + 8 \geq 16 + 8 = 3.8$, $C_4 > C_3 + 8 > 24 + 8 = 4.8$

$C_{2008} > 2008.8 = 164.251 = 16.1004$

$\rightarrow a_{2008} + b_{2008} > 4\sqrt{1004}$ (đpcm)

2. Bằng quy nạp chứng minh: $a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

Do đó: $U_n = 2^n.\sqrt{2 - 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2^{n+1}.\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$

$$\lim_{x\to\infty} u_n = \lim_{x\to\infty}\left(2^{n+1}.\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}.\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Câu 2:

Tìm tất cả các hàm f: $R^+ \to R$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(1) = \dfrac{1}{2} \\ f(xy) = f(x).f(\dfrac{3}{y}) + f(y).f(\dfrac{3}{x}), \forall x, y \in R^+ \end{cases}$$

Đáp án

Tìm tất cả các hàm f: $R^+ \to$ R thoả mãn các điều kiện

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{ và } f(x\,y) = f(x).\,f(\frac{3}{y}) + f(y).f(\frac{3}{x}) + f(y).f\left(\frac{3}{x}\right) \qquad (1)$$

với $\forall$ x, y $\in R^+$

Từ (1) cho x = 1, y = 3 ta có: f(3) = f(1).f(1) + f(3).f(3)

$$= f^2(1) + f^2(3) = \frac{1}{4} f(3)$$

$$\to \left[f(3) - \frac{1}{2}\right]^2 = 0 \Rightarrow f(3) = \frac{1}{2}$$

Thay x = 1 vào (1):

$$f(y) = f(1)f(\frac{3}{y}) + f(y).f(3) = \frac{1}{2} f(y) + \frac{1}{2} f(\frac{3}{y}) \Rightarrow f(\frac{3}{y}) = f(y),\ \forall\ y \in R^+$$

Khi đó (1) trở thành: f(x y) = 2 f(x). f(y) (2)

Trong (2) thay y bởi $\frac{3}{x}$ $\Rightarrow f(3) = 2f(x).f(\frac{3}{x})$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 2[f(x)]^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{1}{2} \\ f(x) = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Trong (2) thay y = x: $f(x^2) = 2[f(x)]^2 = 2.\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Với $\forall x > 0$ thì f(x) = $\frac{1}{2}$ là hàm duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3:

Cho tam giác ABC thoả điều kiện A > B > C. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$f(x) = \sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}} + \sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}} - 1$$

Từ đó suy ra phương trình sau có và chỉ có một nghiệm

$$\sqrt{x - \sin A} + \sqrt{x - \sin B} = \sqrt{x - \sin C}$$

Đáp án

Vì A, B, C là 3 góc của một tam giác nên A > B > C ↔ a > b > c

↔ sinA > sinB > sinC (*)

Tập xác định D = (–∞,sinC) ∪ [sinA, +∞)

$$f'(x) = \frac{\sin A - \sin C}{2(x - \sin C)^2}\sqrt{\frac{x - \sin C}{x - \mathrm{Sin}A}} + \frac{\sin B - \sin C}{2(x - \sin C)^2}\sqrt{\frac{x - \sin C}{x - \sin B}} > 0$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		sinC		sinA		$+\infty$
f'(x)		+	||		||	+	
f(x)	1	↗	$+\infty$ ||		$\sqrt{\frac{\sin A\text{-}\sin B}{\sin A\text{-}\sin C}} - 1$	↗	+1

Vậy Min $f(x) = \sqrt{\frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1$ khi x = sinA

Phương trình $\sqrt{x - \sin A} + \sqrt{x - \sin B} = \sqrt{x - \sin C}$ (1) có tập xác định [sinA, +∞)

$$\leftrightarrow \sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}} + \sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}} - 1 = 0$$

$$\leftrightarrow f(x) = 0$$

Với điều kiện x ≥ sinA. Từ bảng biến thiên của f(x) suy ra phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu 4:

Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, SB của tứ diện đều SABC. Trên đường thẳng AS và CN ta chọn các điểm P, Q sao cho PQ // BM. Tính độ dài PQ biết rằng cạnh tứ diện bằng 1.

Câu 3:

Cho tam giác ABC thoả điều kiện A > B > C. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$f(x) = \sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}} + \sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}} - 1$$

Từ đó suy ra phương trình sau có và chỉ có một nghiệm

$$\sqrt{x - \sin A} + \sqrt{x - \sin B} = \sqrt{x - \sin C}$$

Đáp án

Vì A, B, C là 3 góc của một tam giác nên $A > B > C \leftrightarrow a > b > c$

$\leftrightarrow \sin A > \sin B > \sin C$ (*)

Tập xác định $D = (-\infty, \sin C) \cup [\sin A, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{\sin A - \sin C}{2(x - \sin C)^2}\sqrt{\frac{x - \sin C}{x - \sin A}} + \frac{\sin B - \sin C}{2(x - \sin C)^2}\sqrt{\frac{x - \sin C}{x - \sin B}} > 0$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\sin C$		$\sin A$		$+\infty$
f'(x)		+	‖		‖	+	
f(x)	1	↗ $+\infty$	‖		$\sqrt{\frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1$	↗	+1

Vậy Min $f(x) = \sqrt{\frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1$ khi $x = \sin A$

Phương trình $\sqrt{x - \sin A} + \sqrt{x - \sin B} = \sqrt{x - \sin C}$ (1) có tập xác định $[\sin A, +\infty)$

$$\leftrightarrow \sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}} + \sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}} - 1 = 0$$

$$\leftrightarrow f(x) = 0$$

Với điều kiện $x \geq \sin A$. Từ bảng biến thiên của f(x) suy ra phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu 4:

Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, SB của tứ diện đều SABC. Trên đường thẳng AS và CN ta chọn các điểm P, Q sao cho PQ // BM. Tính độ dài PQ biết rằng cạnh tứ diện bằng 1.

Đáp án

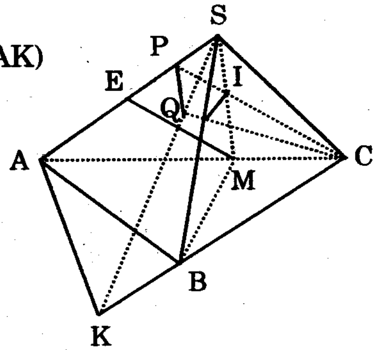
Dựng đoạn PQ

PQ là giao tuyến của 2 mặt phẳng lần lượt qua CN song song BM và mặt phẳng qua SA song song BM

Trong mặt phẳng (SBM) kẻ NI // BM. Khi đó BM// (NIC).

Đường thẳng CI cắt SA tại P, P $\in$(SAK): mặt phẳng chiếu SA và song song BM,

AK // BM.



Giả sử CN cắt SK tại Q. Khi đó Q $\in$ (SAK)

Từ trên $\Rightarrow$ PQ // BM

PQ // BM

$$\Rightarrow PQ \,//\, AK \text{ và } \frac{PQ}{AK} = \frac{SP}{SA}$$

Dựa vào tính chất đường trung bình ta suy ra:

$$SP = PE = EA \text{ và } \frac{SP}{SA} = \frac{1}{3}$$

Từ đó suy ra: $PQ = \frac{1}{3}AK = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN LỚP 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN – TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU

Câu 1: ***(3 điểm)***

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\log_7(2x+3y) = \log_3(2+2x+3y) \\ \ln\left(4x^2+x+1\right)+x^3+21 = 9y \end{cases}$$

Đáp án

Đặt $t = \log_7(2x+3y) \Leftrightarrow 2x+3y = 7^t$.

Khi đó ta có phương trình: $2t = \log_3\left(7^t+2\right)$ ***0,5đ***

$\Leftrightarrow 9^t = 7^t + 2 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{9}\right)^t + 2.\left(\frac{1}{9}\right)^t = 1$ (1) ***0,5đ***

Hàm số $f(t) = \left(\frac{7}{9}\right)^t + 2.\left(\frac{1}{9}\right)^t$ giảm trên R nên phương trình (1)

$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2x+3y = 7$ ***0,5đ***

Thay 3y = 7 – 2x vào phương trình thứ hai ta thu được phương trình

$\ln\left(4x^2+x+1\right)+x^3+6x = 0$ (2) ***0,5đ***

Xét hàm số

$$g(x) = \ln\left(4x^2+x+1\right)+x^3+6x \Rightarrow g'(x) = \frac{8x+1}{4x^2+x+1}+3x^2+6$$

$g'(x) = 3x^2 + \frac{24x^2+14x+7}{4x^2+x+1} > 0, \forall x \in R$ hàm số g(x) tăng trên R. ***0,5đ***

Phương trình (2) $\Leftrightarrow g(x) = g(0) \Leftrightarrow x = 0$ từ đó thu được $y = \frac{7}{3}$ ***0,5đ***

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(0;\frac{7}{3}\right)$.

Câu 2: ***(4 điểm)***

Có bao nhiêu số nguyên dương n không vượt quá 2008 thỏa mãn C_{2n}^{n} không phải là bội của 4?

(Trong đó C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử)

Đáp án

Với n = 1 thì $C_2^1 = 2$ không phải là bội của 4.

Với n ≥ 2, ta có $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Đặt $s = [\log_2 n]$, ở đây kí hiệu [x] chỉ phần nguyên của số x.

Khi đó số mũ của 2 trong phân tích tiêu chuẩn của (2n)! và của n! lần lượt là:

$$a = \sum_{k=1}^{s+1}\left[\frac{2n}{2^k}\right] \text{ và } b = \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{n}{2^k}\right] \qquad \textit{1đ}$$

Khi đó số mũ của 2 trong phân tích tiêu chuẩn của C_{2n}^n là:

$$t = a - 2b = \left(\sum_{k=1}^{s+1}\left[\frac{2n}{2^k}\right]\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{n}{2^k}\right]\right) = n - \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{n}{2^k}\right] \qquad \textit{0,5đ}$$

+ Nếu n là một lũy thừa của 2, giả sử $n = 2^s$, $m \times Z^+$ thì

$$t = 2^s - \sum_{k=0}^{s-1} 2^k = 2^s - (2^s - 1) = 1 < 2$$

$\Rightarrow C_{2n}^n$ không phải là bội của 4. *0,5đ*

+ Nếu n không phải là lũy thừa của 2, giả sử $n = 2^s + p; 0 < p < 2^s$. Khi đó:

$$t = 2^s + p - \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{2^s + p}{2^k}\right] = \left(2^s - \sum_{k=1}^{s-1} 2^k\right) + \left(p - \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{p}{2^k}\right]\right)$$

$$= 1 + \left(p - \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{p}{2^k}\right]\right) \qquad \textit{1đ}$$

Mà $\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{p}{2^k}\right] \le \sum_{k=1}^{s}\frac{p}{2^k} = p\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) < p \Rightarrow t > 1 \Rightarrow t \ge 2$ *0,5đ*

Do đó C_{2n}^n là một bội của 4.

Vậy C_{2n}^n không phải bội của 4 khi và chỉ khi n là một lũy thừa của 2.

Trong các số nguyên dương không vượt quá 2008 có 11 số là lũy thừa của 2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. *0,5đ*

Câu 3: *(3 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm S thay đổi khác A. Đường thẳng qua H vuông góc với mặt phẳng (SBC) cắt đường thẳng d tại K. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $BK^2 + CS^2$ khi S thay đổi trên d.

Đáp án

AH cắt BC tại D, ta có $AH \perp BC$, $SA \perp BC \Rightarrow (SAD) \perp BC$

Đường thẳng qua H vuông góc mp(SBC) nằm trong mp(SAD) cắt SD tại I và cắt d tại K.

Ta có: $CH \perp AB$; $CH \perp SA \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow CH \perp SB$

Mà $IK \perp (SBC) \Rightarrow IK \perp SB \Rightarrow (CIK) \perp SB$

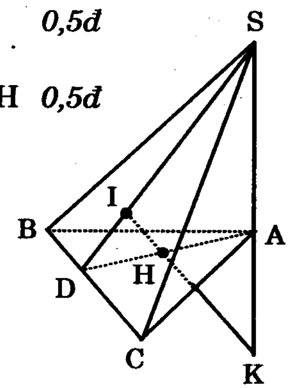
$\Rightarrow CI \perp SB$ hay I là trực tâm tam giác SBC. *1đ*

Tứ diện BCSK là tứ diện trực tâm nên ta có:

$$BK^2 + CS^2 = BC^2 + SK^2$$ *0,5đ*

Mà BC không đổi, nên để $BK^2 + CS^2$ nhỏ nhất thì ta cần tìm S để SK nhỏ nhất. Xét hai tam giác SAD và AHK đồng dạng thu được:

$$\frac{SA}{AH} = \frac{AD}{AK} \Rightarrow AS.AK = AH.AD$$ *0,5đ*



Ta có: $SK^2 = (AS + AK)^2 \geq 4AS.AK = 4AD.AH$ *0,5đ*

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$AS = AK = \sqrt{AH.AD}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $BK^2 + CS^2$ là $BC^2 + 4AD.AH$ đạt được tại 2 vị trí S chạy trên đường thẳng d mà $AS = \sqrt{AD.AH}$ *0,5đ*

Câu 4: *(3 điểm)*

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} = 1$$

Chứng minh rằng: $abc \geq 1$

Đáp án

Từ điều kiện bài ra $\Rightarrow \frac{1}{a+1}; \frac{1}{b+1}; \frac{1}{c+1} \in (0;1)$.

Do đó có các góc nhọn A, B, C sao cho:

$$\cos A = \frac{1}{a+1}; \cos B = \frac{1}{b+1}; \cos C = \frac{1}{c+1}.$$

Thay vào giả thiết thu được:

Đáp án

Với n = 1 thì $C_2^1 = 2$ không phải là bội của 4.

Với $n \geq 2$, ta có $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Đặt $s = [\log_2 n]$, ở đây kí hiệu $[x]$ chỉ phần nguyên của số x.

Khi đó số mũ của 2 trong phân tích tiêu chuẩn của (2n)! và của n! lần lượt là:

$$a = \sum_{k=1}^{s+1}\left[\frac{2n}{2^k}\right] \text{ và } b = \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{n}{2^k}\right]$$ *1đ*

Khi đó số mũ của 2 trong phân tích tiêu chuẩn của C_{2n}^n là:

$$t = a - 2b = \left(\sum_{k=1}^{s+1}\left[\frac{2n}{2^k}\right]\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{n}{2^k}\right]\right) = n - \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{n}{2^k}\right]$$ *0,5đ*

+ Nếu n là một lũy thừa của 2, giả sử $n = 2^s$, $m \times Z^+$ thì

$$t = 2^s - \sum_{k=0}^{s-1} 2^k = 2^s - (2^s - 1) = 1 < 2$$

$\Rightarrow C_{2n}^n$ không phải là bội của 4. *0,5đ*

+ Nếu n không phải là lũy thừa của 2, giả sử $n = 2^s + p; 0 < p < 2^s$. Khi đó:

$$t = 2^s + p - \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{2^s + p}{2^k}\right] = \left(2^s - \sum_{k=1}^{s-1} 2^k\right) + \left(p - \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{p}{2^k}\right]\right)$$

$$= 1 + \left(p - \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{p}{2^k}\right]\right)$$ *1đ*

Mà $\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{p}{2^k}\right] \leq \sum_{k=1}^{s}\frac{p}{2^k} = p\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) < p \Rightarrow t > 1 \Rightarrow t \geq 2$ *0,5đ*

Do đó C_{2n}^n là một bội của 4.

Vậy C_{2n}^n không phải bội của 4 khi và chỉ khi n là một lũy thừa của 2. Trong các số nguyên dương không vượt quá 2008 có 11 số là lũy thừa của 2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. *0,5đ*

Câu 3: *(3 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm S thay đổi khác A. Đường thẳng qua H vuông góc với mặt phẳng (SBC) cắt đường thẳng d tại K. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $BK^2 + CS^2$ khi S thay đổi trên d.

Đáp án

AH cắt BC tại D, ta có AH ⊥ BC, SA ⊥ BC ⇒ (SAD) ⊥ BC

Đường thẳng qua H vuông góc mp(SBC) nằm trong mp(SAD) cắt SD tại I và cắt d tại K.

Ta có: CH ⊥ AB; CH ⊥ SA ⇒ CH ⊥ (SAB) ⇒ CH ⊥ SB

Mà IK ⊥ (SBC) ⇒ IK ⊥ SB ⇒ (CIK) ⊥ SB

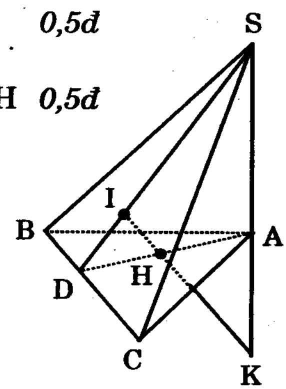
⇒ CI ⊥ SB hay I là trực tâm tam giác SBC. *1đ*

Tứ diện BCSK là tứ diện trực tâm nên ta có:

$$BK^2 + CS^2 = BC^2 + SK^2 \qquad \mathit{0,5đ}$$

Mà BC không đổi, nên để $BK^2 + CS^2$ nhỏ nhất thì ta cần tìm S để SK nhỏ nhất. Xét hai tam giác SAD và AHK đồng dạng thu được:

$$\frac{SA}{AH} = \frac{AD}{AK} \Rightarrow AS.AK = AH.AD \qquad \mathit{0,5đ}$$



Ta có: $SK^2 = (AS + AK)^2 \geq 4AS.AK = 4AD.AH$ *0,5đ*

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$AS = AK = \sqrt{AH.AD}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $BK^2 + CS^2$ là $BC^2 + 4AD.AH$ đạt được tại 2 vị trí S chạy trên đường thẳng d mà $AS = \sqrt{AD.AH}$ *0,5đ*

Câu 4: *(3 điểm)*

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} = 1$$

Chứng minh rằng: $abc \geq 1$

Đáp án

Từ điều kiện bài ra $\Rightarrow \frac{1}{a+1}; \frac{1}{b+1}; \frac{1}{c+1} \in (0;1)$.

Do đó có các góc nhọn A, B, C sao cho:

$$\cos A = \frac{1}{a+1}; \cos B = \frac{1}{b+1}; \cos C = \frac{1}{c+1}.$$

Thay vào giả thiết thu được:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$$

$$\Leftrightarrow (\cos A + \cos B\cos C)^2 = (1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C)$$

$$\Leftrightarrow (\cos A + \cos B\cos C)^2 = \sin^2 B\sin^2 C$$

$\Leftrightarrow \cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C$ (do A, B, C là các góc nhọn)

$$\Leftrightarrow \cos A = -\cos(B + C) \Leftrightarrow A + B + C = \pi$$

Như vậy A, B, C là 3 góc của một tam giác. *1đ*

Theo cách đặt A, B, C thì

$$a = \frac{1 - \cos A}{\cos A};\ b = \frac{1 - \cos B}{\cos B};\ c = \frac{1 - \cos C}{\cos C}$$ *0,5đ*

Điều cần chứng minh đưa được về:

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq \cos A\cos B\cos C$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \cos A)}{\sin A}.\frac{(1 - \cos B)}{\sin B}.\frac{(1 - \cos C)}{\sin C} \geq \cot A.\cot B.\cot C$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} \geq \cot A.\cot B.\cot C$$

$$\Leftrightarrow \tan A\tan B\tan C \geq \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\ (*)$$ *0,5đ*

Bây giờ ta có:

$$\tan A + \tan B = \frac{\sin C}{\cos A\cos B}$$

$$= \frac{2\sin C}{\cos(A - B) + \cos(A + B)} \geq \frac{2\sin C}{1 - \cos C} = 2\cot\frac{C}{2}$$ *0,5đ*

Tương tự: $\tan B + \tan C \geq 2\cot\frac{A}{2};\ \tan C + \tan A \geq 2\cot\frac{B}{2}$

Cộng các bất đẳng thức theo vế ta suy ra (3). (đpcm)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ *0,5đ*

Câu 5: *(4 điểm)*

Cho phương trình với tham số n nguyên dương $x + 2x^2 + ... + nx^n = \frac{3}{4}$

1. Chứng minh rằng phương trình trên có nghiệm dương duy nhất với mọi n nguyên dương, kí hiệu là x_n.
2. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Tính giới hạn đó.

Đáp án

1. Xét hàm số $f_n(x) = x + 2x^2 + ... + nx^n - \frac{3}{4}$ liên tục trên R và có

$f_n'(x) = 1 + 2^2x + ... + n^2x^{n-1}$

$f_n'(x) > 0 \quad \forall x \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f_n(x)$ tăng trên $(0; +\infty)$ (1)

Mà $f_n(0) = -\frac{3}{4} < 0$, $f_n(1) > 0 \Rightarrow$ phương trình $f_n(x) = 0$ **có nghiệm** trong khoảng $(0; +\infty)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm dương x_n **duy** nhất với mọi n. ***1đ***

2. Ta có $3f_n\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + 2.\frac{1}{3} + ... + n.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{9}{4}$

$$f_n\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 2.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + n.\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{4}$$

Trừ theo vế:

$$2f_n\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{n}{3^n} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{3^n} - \frac{3}{2} = -\frac{2n+3}{2.3^n} < 0$$ ***1đ***

Do đó $x_n > \frac{1}{3} \ \forall n \in Z^+$

Áp dụng định lý Lagrange tồn tại $y_n \in \left(\frac{1}{3}; x_n\right)$ sao cho:

$$\frac{2n+3}{4.3^n} = \left|f_n(x_n) - f_n\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|x_n - \frac{1}{3}\right|\left|f_n'(y_n)\right| > \left|x_n - \frac{1}{3}\right|$$

Vì $f_n'(y_n) > 1$ với $y_n > 0$. ***1đ***

Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{4.3^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$ ***1đ***

Câu 6: *(3 điểm)*

Tìm tất cả các hàm số f: R → R thỏa mãn:

$$f\left(f^2(x) + f(y)\right) = y + x.f(x) \quad \forall x, y \in R$$

Đáp án

Ký hiệu $f\left(f^2(x)+f(y)\right)=y+x.f(x)\quad \forall x,y\in R$ (1)

+ Nếu f(x) = f(y), từ (1) ta có:

$$y+x.f(x)=f\left(f^2(x)+f(y)\right)=f\left(f^2(x)+f(x)\right)=x+x.f(x)\Rightarrow x=y$$

Do đó hàm f là đơn ánh. *0,5đ*

+ Đặt a = f(0). Thay x = 0, y = 0 vào (1) được: $f(a^2+a)=0$

Thay $x=a^2+a$ và y = 0 vào (1) thì:

$$f\left(f^2\left(a^2+a\right)+a\right)=\left(a^2+a\right).f\left(a^2+a\right)=0\Rightarrow f(a)=0$$

Khi đó $f(a)=f\left(a^2+a\right)\Rightarrow a=a^2+a\Rightarrow a=0$, tức là f(0) = 0 *0,5đ*

Thay x =0 vào (1) thì $f\left(f(y)\right)=y\ \forall y\in R$

Thay y =0 vào (1) thì $f\left(f^2(x)\right)=x.f(x)\ \forall x\in R$ (2)

Thay x bởi f(x) vào (2) thì $f\left(x^2\right)=f(x)f\left(f(x)\right)=x.f(x)\ \forall x\in R$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra

$$f\left(f^2(x)\right)=f\left(x^2\right)\Rightarrow f^2(x)=x^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=x\\ f(x)=-x\end{array}\right.,\forall x\in R$$ *0,5đ*

+ Thử trực tiếp ta thấy f(x) = x và f(x) = –x là 2 nghiệm hàm của bài toán. *0,5đ*

+ Giả sử bài toán có nghiệm khác 2 nghiệm trên khi đó tồn tại b, c khác 0 sao cho f(b) = b; f(c) = –c; Thay x = b, y = c vào (1) thì:

$f\left(b^2-c\right)=c+b^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c+b^2=b^2-c\\ c+b^2=c-b^2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ c=0\end{array}\right.$ (vô lý do ta chọn b, c khác 0) *1đ*

Vậy bài toán chỉ có 2 nghiệm là f(x) = x và f(x) = –x.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN NHA TRANG – KHÁNH HÒA

Câu 1: *(4 điểm)*

Cho $\begin{cases} m > n > p > 0 \\ mp < n^2 \\ \dfrac{a}{m} + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{p} = 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm trong khoảng (0; 1).

Đáp án

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$

Ta có $f(n/m) = a(n/m)^2 + b(n/m) + c$

$= n^2/m\ (a/m + b/n) + c$

$= c\ (mp - n^2)/mp$

Và $f(0) = c$

Do đó $f(0)f(n/m) = c^2(mp - n^2)/mp$

Nếu $c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x = n/m$ thỏa đề bài

Nếu $c \neq 0$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0; n/m)$

Do $f(0)f(n/m) = c^2(mp - n^2)/mp < 0$, $n/m < 1$

Nên phương trình có nghiệm trong khoảng (0; 1).

Câu 2: *(4 điểm)*

Giải và biện luận bất phương trình:

$3x^2 - (a + 3)x + a > \dfrac{1}{2}(a - 3x)(\log_3 x)^3$. Trong đó a là tham số.

Đáp án

Bất phương trình đã cho xác định với $x > 0$ và có thể viết dưới dạng

$$(3x - a)(x - 1) > \frac{1}{2}(a - 3x)(\log_3 x)^3$$

$$\Leftrightarrow (3x - a)\left(\frac{1}{2}(\log_3 x)^3 + x - 1\right) > 0$$

Đặt $f(x) = \frac{1}{2}(\log_3 x)^3 + x - 1$; bất phương trình trên được viết dưới dạng

$$(3x - a)\,f(x) > 0 \qquad (1)$$

Hàm số f(x) xác định và đồng biến trong khoảng $(0, +\infty)$.

Vì $f(1) = 0$ nên $f(x) < 0$ với mọi $x \in (0,1)$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in (1, +\infty)$.

$$3x - a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$$

1. Nếu $a/3 \leq 0$, tức là $a \leq 0$ thì dấu của vế trái của bất phương trình (1) được cho trong bảng sau:

x		$\frac{a}{3}$		0		1	
g(x)					–	0	+
3x – a	–	0	+		+		+
(3x – a)f(x)					–	0	+

Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 1$.

2. Nếu $0 < \frac{a}{3} < 1$, tức là $0 < a < 3$ thì ta có bảng xét dấu:

x	0		$\frac{a}{3}$		1	
f(x)		–		–	0	+
3x – a		–	0	+		+
(3x – a) f(x)		+	0	–	0	+

Nghiệm của bất phương trình đã cho là: $0 < x < \frac{a}{3}$ hoặc $x > 1$.

Lập bảng xét dấu của $(3x - a)f(x)$ tương tự như trên, ta được các kết quả sau:

3. Nếu $\frac{a}{3} = 1$ tức là $a = 3$ thì nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$x > 0$; $x \neq 1$.

4. Nếu $\frac{a}{3} > 1$, tức là $a > 3$ thì nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$0 < x < 1$; $x > \frac{a}{3}$.

Kết luận:

1. Nếu $a \leq 0$ thì nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x > 1$

2. Nếu $0 < a < 3$ thì nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$0 < x < \frac{a}{3}$; $x > 1$.

3. Nếu $a = 3$ thì nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x > 0$; $x \neq 1$

4. Nếu $a > 3$ thì nghiệm của bất phương trình đã cho là: $0 < x < 1$; $x > \frac{a}{3}$.

Câu 3: *(4 điểm)*

Dãy số nguyên $\{a_n\}$ được xác định như sau: $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 23$;

$a_n = \dfrac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}$, $n \geq 4$. Chứng minh với mọi n thì $a_n \vdots n$.

Đáp án

Xét dãy sau: $v_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$

Từ công thức truy hồi ta có $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{6a_{n-1}a_{n-3} - 8a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}$

Suy ra: $v_n = 6v_{n-1} - 8v_{n-2}$ (1)

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$ ta có $v_{n+1} = 4^n - 2^n$ (2)

(2) được chứng minh bằng quy nạp như sau:

Với $n = 1$, ta có $v_2 = \dfrac{a_2}{a_1} = 2 = 4^1 - 2^1$, vậy (2) đúng khi $n = 1$

Với $n = 2$, ta có $v_3 = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{24}{2} = 12 = 4^2 - 2^2$, vậy (2) đúng khi $n = 2$

Giả sử (2) đã đúng khi $n = k \geq 2$, tức là $v_{k+1} = 4^2 - 2^2$ (3)

Xét khi $n = k + 1$. Theo (1) ta có $v_{k+2} = 6v_{k+1} - 8v_k$ (4)

Áp dụng giả thuyết quy nạp (3) ta có:

$$v_{k+2} = 6(4^k - 2^k) - 8(4^{k-1} - 2^{k-1}) = 6.4^k - 6.2^k - 2.4^k - 4.2^k$$
$$= 4.4^k - 2.2^k = 4^{k+1} - 2^{k+1}$$

Vậy (2) cũng đúng khi $n = k + 1$

Theo nguyên lý quy nạp thì (2) đúng với mọi $n = 1, 2, \ldots$

Ta có: $a_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \ldots \dfrac{a_2}{a_1} . a_1 = v_n . v_{n-1} \ldots v_2 . a_1$

Vì thế từ (2) suy ra $a_n = (4^{n-1} - 2^{n-1})(4^{n-2} - 2^{n-2}) \ldots (4 - 2)$ (5)

Với mọi số nguyên tố p, theo Định lý Fermat ta có:

$(4^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod p$; $(2^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod p$

Suy ra: $(4^{p-1} - 2^{p-1}) \equiv \pmod p \Rightarrow (4^{p-1} - 2^{p-1}) \vdots p$ với mọi số nguyên tố p. Từ đó suy ra nếu s là bội số của p – 1, thì $(4^s - 2^s) \vdots p$

Giả sử n là số nguyên dương tùy ý, và n có dạng khai triển sau

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k},$$

(ở đây $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ là các số nguyên tố).

Từ $n \vdots p_1^{r_1}$ suy ra $n \vdots p_1$, $n \vdots p_2$, ..., $n \vdots p_1^{r_1}$

Tức là $n = d_1 p_1 = d_2 p_1^2 = d_3 p_1^3 = \dots = d_{r_1} p_1^{r_1}$

Suy ra: $d_1 > d_2 >.. d_{r_1} \Rightarrow n - d_1 > n - d_2 > \dots > n - d_{r_1}$ và ta có:

$$n - d_1 = d_1(p_1 - 1)$$
$$n - d_2 = d_2(p_1^2 - 1)$$
$$n - d_{r_1} = d_{r_1}(p_1^{r_1} - 1)$$

Như vậy ta có $n - d_1, n - d_2, \dots, n - d_{r_1}$ là r_1 bội khác nhau của $p_1 - 1$.

Theo trên ta có:

$$(4^{n-d_k} - 2^{n-d_k}) \vdots p_1 \quad \forall\, k = 1, 2, \dots, r_1$$

Từ đó dựa vào (5), ta có: $a_n \vdots p_1^{r_1}$

Lập luận tương tự có: $a_n \vdots p_j^{r_j}$ (với mọi j = 2, 3,.., k)

Suy ra: $a_n \vdots p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ hay $a_n \vdots n$. (đpcm)

Câu 4: *(4 điểm)*

Cho A, B, C là ba điểm phân biệt trong không gian. (P) là mặt phẳng cố định. Tìm $M \in (P)$ sao cho $S = MA^2 + 4MB^2 - 9MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Đáp án

Gọi G là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} - 9\overrightarrow{GC} = \vec{0}$, suy ra G cố định và thuộc mp (ABC).

$$S = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 - 9(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$
$$= -4MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} - 9\overrightarrow{GC}) + GA^2 + 4GB^2 - 9GC^2$$
$$= -4MG^2 + GA^2 + 4GB^2 - 9GC^2$$

Vì $GA^2 + 4GB^2 - 9GC^2$ không đổi nên S đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là chân đường vuông góc hạ từ G xuống (P).

Câu 5: *(4 điểm)*

Tìm chữ số đơn vị của: $\left[\dfrac{10^{2000}}{10^{100}+3}\right]$

Đáp án

$$\frac{10^{2000}}{10^{100}+3} = \frac{10^{2000}-3^{20}}{10^{100}+3} + \frac{3^{20}}{10^{100}+3}$$

$$3^{20} = 9^{10} < 10^{10} < 10^{100} + 3$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{3^{20}}{10^{100}+3} < 1$$

Mặt khác: $10^{2000} - 3^{20} \vdots 10^{200} - 3^{2} \vdots 10^{100} + 3$

$$\Rightarrow A = \left[\frac{10^{2000}}{10^{100}+3}\right] = \frac{10^{2000}-3^{20}}{10^{100}+3}$$

$$= \frac{10^{200}-3^{2}}{10^{100}+3}[10^{200.9} + 10^{200.8}.3^{2} + ... + 10^{200.1}.3^{2.8} + 3^{2.9}]$$

$$= (10^{100} - 3)(10^{1800} + 10^{1600}.3^{2} + ... + 3^{18})$$

Mà $3^{18} \equiv 3^{4.4+2} \equiv 9.81^{4} \equiv 9 \pmod{10}$

$$\Rightarrow A \equiv -3.9 \equiv -27 \equiv 3 \pmod{10}$$

Vậy chữ số tận cùng của $\left[\dfrac{10^{2000}}{10^{100}+3}\right]$ là 3.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH – ĐỒNG NAI

Câu 1:

Tìm tất cả các hàm số f: R → R; f đồng biến thực sự và thỏa điều kiện:

$$f[f(x) + y] = f(x + y) + 1;\ \forall x, y \in R$$

Đáp án

Giả sử: f là hàm số thỏa bài toán

Cho $x = 0$ ta có: $f[f(0) + y] = f(y) + 1;\ \forall y$

Hay $f[f(0) + x] = f(x) + 1;\ \forall x \in R$

Cho $y = 0$ ta có: $f[f(x)] = f(x) + 1;\ \forall x \in R$.

Do đó: $f[f(0) + x] = f[f(x);\ \forall x \in R$

Do f tăng thực sự trên R nên $f(x) = x + f(0);\ \forall x \in R$

Thay vào phương trình đề bài, ta được: $f(0) = 1$

Vậy: $f(x) = x + 1;\ \forall x \in R$

Câu 2: Cho a là số thực dương, xét dãy số (x_n):

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} \ge (n+2).x_n - \sum_{k=1}^{n-1} k.x_k \end{cases} \forall n \ge 1. \text{ Tìm } \lim x_n.$$

Đáp án

Ta chứng minh bằng quy nạp: $x_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} k.x_k; \forall n \ge 1$ (1)

- Khi $n = 1$; $x_2 \ge 3.x_1 > x_1 = a$.
- Giả sử (1) đúng tới n; ta có:

$$x_{n+2} \ge (n+3).x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} k.x_k$$

$$= (n+1).x_{n+1} + 2x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} k.x_k > (n+1)x_{n+1} + 2.\sum_{k=1}^{n} k.x_k - \sum_{k=1}^{n} k.x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} k.x_k.$$

Theo nguyên lý quy nạp; ta được $x_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} k.x_k$

Do $x_1 > 0$ nên từ đó $x_n > 0\ \forall n$.

Ta có: $x_1 = a$; $x_2 > 2x_1 = 1!a$.

Giả sử: $x_{n+1} > a.n!$.

Ta có: $x_{n+2} > (n + 1).x_{n+1} > (n + 1).a.n! = (n + 1)!.a$.

Vậy: $x_{n+1} > a.n!$ $\forall n \in Z^+$; và $\lim a.n! = +\infty$ nên $\lim x_n = +\infty$.

Câu 3:

Tồn tại hay không một hàm số f: $(0; +\infty) \to R$; f liên tục và thỏa mãn mỗi x thuộc R^+ thì trong 2 số f(x) hoặc f(2x) có một số bằng 0 và số còn lại khác không?

Đáp án

Giả sử f là hàm số thỏa điều kiện bài toán

Xét hàm số $g(x) = f(2x) - f(x)$ $\forall x > 0$

Do hàm số f liên tục trên R^+ nên g cũng liên tục trên R^+

Theo giả thiết ta có: phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm trên R^+, do đó:

$$(g(x) > 0; \forall x > 0) \vee (g(x) < 0, \forall x > 0)$$

TH_1: Nếu $\forall x > 0$: $g(x) > 0$ thì $f(2x) > f(x)$ $\forall x > 0$ và do đó:

$$f(x) < f(2x) < f(4x) < f(8x) \text{ mọi } x > 0 \ (*)$$

Theo giả thiết trong 2 số f(x), f(2x) có 1 số bằng 0 và số kia khác không

f(4x), f(8x) có 1 số bằng 0 và số kia khác không (mâu thuẫn *)

TH_2: nếu $\forall x > 0$: $g(x) < 0$ thì $f(2x) > f(x)$ $\forall x > 0$ (làm tương tự)

Vậy không tồn tại hàm số f thỏa điều kiện bài toán.

Câu 4:

Cho tam giác ABC gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm giữa của các đường gấp khúc CAB, ABC, BCA tương ứng. Gọi l_a, l_b, l_c lần lượt là các đường thẳng qua A_1, B_1, C_1 và song song với các phân giác trong của góc A, B, C. Chứng minh: ba đường thẳng l_a, l_b, l_b đồng quy.

Đáp án

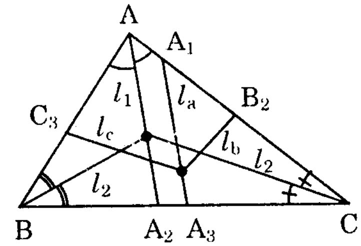
Gọi AA_2 là phân giác trong của góc A, l_a // AA_2 và l_a cắt BC tại A_3. Ta sẽ chứng minh: A_3 là trung điểm của đoạn BC.

Ký hiệu: a, b, c là độ dài các đoạn BC, AC, AB, ta có:

$$\frac{CA_3}{CA_2} = \frac{CA_1}{CA}; CA_1 = \frac{AB + AC}{2}$$

$$\Rightarrow CA_3 = CA_2.\frac{CA_1}{CA} = CA_2.\frac{b+c}{2b} \text{ nhưng } CA_2 = \frac{a.b}{b+c}$$

$$\Rightarrow CA_3 = \frac{a.b}{b+c}.\frac{b+c}{2b} = \frac{a}{2}$$



$\Rightarrow A_3$ là trung điểm của BC.

Chứng minh tương tự có B_3, C_3 là trung điểm của đoạn AC, AB.

Như vậy l_a, l_b, l_c lần lượt là các đường thẳng qua trung điểm A_3, B_3, C_3 và song song với các phân giác trong của góc A, B, C.

Xét phép vị tự tâm G, tỉ số k = –1/2 (G là trọng tâm của tam giác ABC)

$V_G^{-\frac{1}{2}}: A \mapsto A_3;\ B \mapsto B_3;\ C \mapsto C_3$ do các phân giác trong $l_1 // l_a$; $l_2 // l_b$; $l_3 // l_c$.

Suy ra $V_G^{-\frac{1}{2}}: l_1 \mapsto l_a;\ l_2 \mapsto l_b;\ l_3 \mapsto l_c$; vì l_1, l_2, l_3 đồng quy nên l_a, l_b, l_c đồng quy.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN LỚP 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH – PHÚ YÊN

Câu 1: *(3 điểm)*

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1+x}{1-y} = e^{\cos x - \cos y} \\ y = \sqrt{2x - x^2} - 1 \end{cases}$$

Đáp án

Đặt z = y, hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{1+x}{1+z} = e^{\cos x - \cos y} & (1) \\ z = 1 - \sqrt{2x - x^2} & (2) \end{cases}$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} z \le 1 \\ (z-1)^2 = 2x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \le 1 \\ (x-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$

Nên nếu (x, z) là nghiệm thì $x, z \in [0; 2]$

Do hai vế của (1) dương, lấy logarit neper hai vế ta được

$$\ln(x+1) - \ln(z+1) = \cos x - \cos z$$
$$\Leftrightarrow \ln(x+1) - \cos x = \ln(z+1) - \cos z$$
$$\Leftrightarrow f(x) = f(z) \qquad (3)$$

(với $f(t) = \ln(t+1) - \cos t$, $t \in [0; 2]$)

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t+1} + \sin t > 0$, $\forall t \in [0; 2]$ nên f tăng trên $t \in [0; 2]$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow x = z$. Thế vào (2) ta giải được $x = z = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$.

Câu 2: *(3 điểm)*

Tìm tất cả các tập con khác rỗng A, B, C của tập các số nguyên dương Z^+ thỏa:

(1) $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$;

(2) $A \cup B \cup C = \mathbb{Z}^+$;

(3) Với mọi $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, ta có $a + c \in A$, $b + c \in B$, $a + b \in C$.

Đáp án

Giả sử A, B, C là ba tập thỏa mãn bài toán. Do C khác rỗng nên tồn tại x là phần tử nhỏ nhất của C, ta có $\{1, 2, 3,.., x - 1\} \subset A \cup B$. Từ giả thiết với mọi $a \in A$, $b \in B$, ta có $a + x \in A$, $b + x \in B$ nên $t + nx \in A \cup B$, với mọi $t \in \{1, 2, 3..., x - 1\}$. Do đó tất cả các số không chia hết x đều thuộc $A \cup B$ hay với mọi $c \in C$, c là bội của x. Vì vậy, với mọi $a \in A$, $b \in B$, ta có $a + b = kx$.

Giả sử $x = 1$, từ $a \in A$, $b \in B$ suy ra $a + 1 \in A$, $b + 1 \in B$ nên ta cũng có $a + m \in A$, $b + n \in B$ với mọi m, n nguyên dương và do đó $a + b \in A \cap B$. Điều này mâu thuẫn với (1).

Giả sử $x = 2$. Không mất tính tổng quát, ta có $1 \in A$. Từ (3) suy ra mọi số lẻ đều thuộc A. Giả sử $b \in B$, ta có $b + 1 \in C$, suy ra b lẻ (vì C là tập các số chẵn), do đó $b \in A \cap B$. Mâu thuẫn với (1).

Giả sử $x \geq 4$. Ta có $\{1, 2, 3\} \subset A \cup B$. Do (1) nên không mất tính tổng quát, giả sử có hai trong ba số 1, 2, 3 thuộc A mà ta ký hiệu là y, z. Lấy $b \in B$, ta có $b + y, b + z \in C$ hay $b + y$, $b + z$ là bội của x và do đó $(b + y) - (b + z) = y - z$ cũng là bội của x. Mà $|y - z| \leq 2 < x$, nên trường hợp này không thể xảy ra.

Vậy x chỉ có thể bằng 3. Ta chứng minh 1 và 2 không thể đồng thời thuộc A (và do đó cũng không thể đồng thời thuộc B). Giả sử 1 và 2 đều thuộc A, từ (3) ta có các số có dạng $3k + 1$, và $3k + 2$ đều thuộc A, với mọi k nguyên dương. Lấy $b \in B$, ta có $b + 1$ thuộc C suy ra $b + 1$ là bội của 3 hay b có dạng $3k + 2$ nên $b \in A$. Mâu thuẫn với $A \cap B = \varnothing$.

Vậy chỉ có thể $1 \in A$ và $2 \in B$ hoặc ngược lại.

Do đó $A = \{3k + 1 / k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3k + 2 / k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{3k / k \in \mathbb{N}^*\}$ hoặc $A =\{3k + 2 / k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3k + 1 / k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{3k / k \in \mathbb{N}^*\}$. Thử lại các nghiệm này ta thấy thỏa yêu cầu của đề bài.

Câu 3: *(4 điểm)*

Cho hình chóp cụt tam giác với diện tích 2 đáy là B_1, B_2; diện tích xung quanh là S. Chứng minh rằng nếu tồn tại một thiết diện song song với đáy sao cho thiết diện này chia hình chóp thành hai hình chóp cụt mới ngoại tiếp được mặt cầu thì ta sẽ có:

$$S = \left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)\left(\sqrt[4]{B_1} + \sqrt[4]{B_2}\right)^2.$$

Đáp án

Xét hình chóp cụt tam giác $A_1B_1C_1.A_2B_2C_2$.

Đặt $S_{A_1B_1C_1} = B_1$; $S_{A_2B_2C_2} = B_2$;

Gọi thiết diện song song với đáy là $A'B'C'$. Đặt $S_{A'B'C'} = B'$

S_1 là diện tích xung quanh hình chóp cụt $A_1B_1C_1.A'B'C'$.

S_1 là diện tích xung quanh hình chóp cụt $A'B'C'.A_2B_2C_2$.

r_1 là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp cụt $A_1B_1C_1.A'B'C'$.

r_2 là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp cụt $A'B'C'.A_2B_2C_2$

Ta có $\quad V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}r_1(S_1 + B_1 + B') = \dfrac{2}{3}r_1(B_1 + B' + \sqrt{B_1B'})$

$$\Rightarrow S_1 = B_1 + B' + 2\sqrt{B_1B'}$$

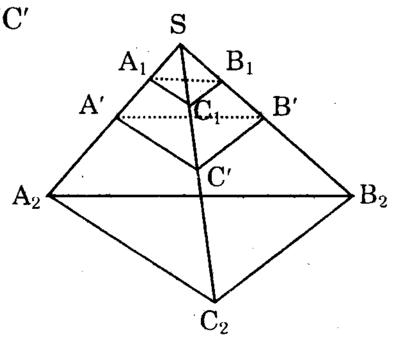
Tương tự ta có: $S_2 = B_2 + B' + 2\sqrt{B_2B'}$

$$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = B_1 + B_2 + 2B' + 2\sqrt{B'}(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2})$$

Xét phép vị tự: $V_S^{\frac{SA'}{SA_1}} : \Delta A_1B_1C_1 \to \Delta A'B'C'$

Vì phép vị tự này biến mặt cầu 1 thành mặt cầu 2 nên suy ra

$$V_S^{\frac{SA'}{SA_1}} : \Delta A'BC' \to \Delta A_2B_2C_2.$$



Do đó: $\dfrac{B'}{B_1} = \left(\dfrac{SA'}{SA_1}\right)^2 = \dfrac{B_2}{B'}$.

Từ đây ta có: $B' = \sqrt{B_1B_2}$

$$\Rightarrow S = B_1 + B_2 + 2\sqrt{B_1B_2} + 2\sqrt{\sqrt{B_1B_2}}\left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)^2 + 2\sqrt[4]{B_1B_2}\left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)\left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2} + 2\sqrt[4]{B_1B_2}\right).$$

$$= \left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)\left(\sqrt[4]{B_1} + \sqrt[4]{B_2}\right)^2$$

Vậy $S = \left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)\left(\sqrt[4]{B_1} + \sqrt[4]{B_2}\right)^2$.

Câu 4: *(3 điểm)*

Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh:

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+(a+b+c)^2 \ge 4\sqrt{3abc(a+b+c)}.$$

Đáp án

Ta có bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}}+\frac{(\sqrt{a+b+c})^3}{\sqrt{abc}} \ge 4\sqrt{3}.$$

Do $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \ge 3(\sqrt{abc})^{1/3}$ nên ta cần chứng minh

$$\frac{3(\sqrt{abc})^{1/3}}{\sqrt{a+b+c}}+\frac{(\sqrt{a+b+c})^3}{\sqrt{abc}} \ge 4\sqrt{3} \qquad (2)$$

Thật vậy, đặt $t=\dfrac{\sqrt{a+b+c}}{(\sqrt{abc})^{1/3}}=\sqrt{\dfrac{a+b+c}{(abc)^{1/3}}} \ge \sqrt{3}$, ta có

$$(2) \Leftrightarrow \frac{3}{t}+t^3 \ge 4\sqrt{3}.$$

Do $t > 0$ nên $\dfrac{3}{t}+t^3=\dfrac{3}{t}+\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^3}{3} \ge \dfrac{4t^2}{\sqrt{3}} \ge 4\sqrt{3}$.

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh và dấu bằng xảy ra khi và

chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{a}=\sqrt{b}=\sqrt{c} \\ a=b=c \\ \dfrac{3}{t}=\dfrac{t^3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$

Câu 5: *(4 điểm)*

Cho dãy (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1=a\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right) \\ u_{n+1}=\ln(2-\sin u_n)-2. \end{cases}$$

Chứng minh (u_n) hội tụ.

Đáp án

Đặt $f(x)=\ln(2-\sin x)-2$. Ta có $u_{n+1}=f(u_n)$, $\forall\, n \ge 1$. Do f liên tục nên nếu (u_n) hội tụ về α thì α là nghiệm của phương trình $f(x)=x$ $\Leftrightarrow \ln(2-\sin x)-x-2=0$.

Ta có $g(x)=\ln(2-\sin x)-x-2$ liên tục và $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)>0$, $f(0)<0$ nên

α tồn tại.

Ta chứng minh $u_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\forall$ n.

Thật vậy, giả sử $u_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, ta có $-1 < \sin u_n < 0$

$\Rightarrow 2 < 2 - \sin u_n < 3$

$\Rightarrow \ln 2 < \ln(1 - \sin u_n) < \ln 3$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \ln 2 - 2 < \ln(1 - \sin u_n) - 2 < \ln 3 - 2 < 0$ hay $-\frac{\pi}{2} < u_{n+1} < 0$

Ta có $f'(x) = \dfrac{-\cos x}{1 - \sin x} \Rightarrow \left(f'(x)\right)^2 = \dfrac{1 - \sin^2 x}{(\sin x - 2)^2}$

Đặt t = sinx, ta có $\left(f'(x)\right)^2 = h(t)$ với $h(t) = \dfrac{1 - t^2}{(t-2)^2}$, $(-1 < t < 0)$.

Ta có $h'(t) = \dfrac{(2t-1)(t-2)}{(t-2)^4}$

t	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$h'(t)$									‖		
$h(t)$		↗	0	↗		↗	$1/4$	↘	‖	↘	

Ta có $h(t) \le \frac{1}{4}$, $\forall t \in (-1, 0)$, suy ra $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$, $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Áp dụng định lý Lagrange, với mọi $a, b \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $a < b$, ta có

$$|f(b) - f(a)| = f'(c)|b - a| \le \frac{1}{2}|b - a| \quad (c \in (a, b))$$

Do đó $\quad |u_n - \alpha| = |f(u_{n-1} - f(\alpha)| \le \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$

$$\le \frac{1}{2^2}|u_{n-2} - \alpha|$$

$$\ldots$$

$$\le \frac{1}{2^{n-1}}|u_1 - \alpha| = \frac{1}{2^{n-1}}|a - \alpha|.$$

Suy ra dãy $(u_n - \alpha)$ hội tụ và do đó (u_n) hội tụ.

Câu 6: *(3 điểm)*

Tìm hàm f: R → R thoả:

i) $f(x + y) \le f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in R$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Đáp án

Thế $x = y = 0$ vào (i), ta được $f(0) \le 2f(0)$, suy ra $f(0) \ge 0$.

Thế $y = -x$ vào (i), ta có $f(x) + f(-x) \ge f(0) \ge 0$ hay $f(-x) \ge -f(x)$, $\forall x \in R$.

Từ (i) ta cũng có $f(nx) \le nf(x)$, $\forall n \in N^*$, $\forall x \in R$

Hay $f(x) \le nf(\frac{x}{n})$, $\forall n \in N^*$, $\forall x \in R$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{n} \le f(\dfrac{x}{n})$, $\forall n \in N^*$, $\forall x \in R$.

Khi đó với x > 0 bất kì, ta có

$$\frac{f(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} \ge \frac{f(x)}{n\frac{x}{n}} = \frac{-f(x)}{-x} \ge \frac{f(-x)}{-x} \ge \frac{f(-\frac{x}{n})}{-\frac{x}{n}}.$$

Cho $n \to \infty$, sử dụng điều kiện (ii) và định lý kẹp, ta được

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(-x)}{-x} = 1 \;\; \forall x \in R.$$

Từ đó ta có $f(x) = x$, $\forall x \ne 0$.

Mặt khác, từ các kết quả trên ta thấy

$$0 \le f(0) = f(1 + (-1)) \le f(1) + f(-1) = 0$$

Vậy $f(x) = x$, $\forall x \in R$. Thử lại ta thấy f chính là hàm cần tìm.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 11

TRƯỜNG THPT LƯU VĂN LIỆT – VĨNH LONG

Câu 1: *(3 điểm)*

Giải bất phương trình

$$\frac{1}{x+1} > \frac{1+\log_3(x+3)}{x} \qquad (1)$$

Đáp án

- Điều kiện: $x \in (-3; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$ *0,25đ*
- Trường hợp 1: $x > 0$

+ Bpt (1) trở thành: $\frac{-1}{x+1} > \log_3(x+3)$ (2) *0,25đ*

+ $x > 0 \Rightarrow \begin{cases} VT = \frac{-1}{x+1} < 0 \\ VP = \log_3(x+3) > \log_3 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$ (2) vô nghiệm. *0,5đ*

- Trường hợp 2: $x \in (-3; 0) \setminus \{-1\}$

+ Bpt (1) trở thành: $\frac{-1}{x+1} < \log_3(x+3)$ (3) *0,25đ*

+ $-3 < x \le -2 \Rightarrow \begin{cases} VT = \frac{-1}{x+1} > \frac{1}{2} \\ VP = \log_3(x+3) \le \log_3 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (3) vô nghiệm. *0,5đ*

+ $-2 < x < -1 \Rightarrow \begin{cases} VT = \frac{-1}{x+1} > 1 \\ VP = \log_3(x+3) < \log_3 2 < 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (3) vô nghiệm. *0,5đ*

+ $-1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} VT = \frac{-1}{x+1} < -1 \\ VP = \log_3(x+3) > \log_3 2 > \log_3\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (3) nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 0)$ *0,5đ*

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 0)$ *0,25đ*

Câu 2: *(3 điểm)*

Trong hình vuông ABCD có độ dài cạnh là 4 cho trước 33 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Vẽ các đường tròn có bán kính $R = \sqrt{2}$, tâm lần lượt là 33 điểm trên.

Hỏi có hay không 3 điểm trong 33 điểm nói trên sao cho chúng đều thuộc phần giao của 3 hình tròn có các tâm cũng chính là 3 điểm đó. Nếu có, hãy giải thích tại sao?

Đáp án

- *Trả lời:* Có 3 điểm trong 33 điểm sao cho chúng đều thuộc phần giao của 3 hình tròn có các tâm cũng chính là 3 điểm đó. *1đ*
- *Giải thích.*
  - + Chia hình vuông ABCD thành 16 hình vuông đơn vị (mỗi hình vuông có cạnh bằng 1 đơn vị độ dài) *0,5đ*
  - + Với 33 điểm chứa trong 16 hình vuông đơn vị, theo nguyên tắc Dirichlet: có ít nhất một hình vuông đơn vị chứa không ít hơn 3 điểm. *0,5đ*
  - + Mặt khác: khoảng cách giữa 2 điểm bất kì trong hình vuông đơn vị không thể vượt quá $\sqrt{2}$ (độ dài đường chéo của hình vuông đơn vị bằng $\sqrt{2}$). *0,5đ*
  - + Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là 3 điểm cùng nằm trong một hình vuông đơn vị nào đó. Vẽ 3 đường tròn có tâm lần lượt là O_1, O_2, O_3 và bán kính bằng $\sqrt{2}$ thì 3 điểm O_1, O_2, O_3 đều thuộc phần giao của 3 hình tròn này. *0,5đ*

Câu 3: *(4 điểm)*

Cho tứ diện ABCD và đặt u = AB.CD, v = AC.BD, w = AD.BC. Chứng minh rằng u, v, w là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó.

Đáp án

- + Đặt: a = AB, b = AC, c = AD, m = BC, n = CD, p = BD.

  Ta có: u = a.n, v = b.p, w = c.m

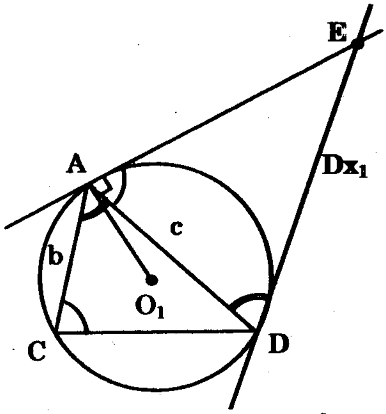
+ Gọi At_1, At_2, At_3 lần lượt là tiếp tuyến của các đường tròn ngoại tiếp ΔACD, ΔABD, ΔABC.

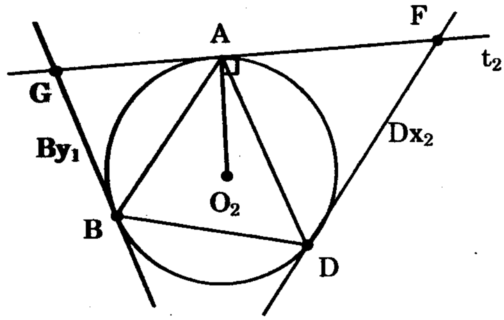
+ Trong (ACD) kẻ Dx_1 // AC cắt At_1 tại E, ta có DE // AC.

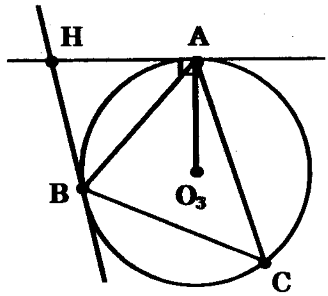
+ Trong (ABD) kẻ Dx_2 // AB cắt At_2 tại F, By_1 // AD cắt At_2 tại G. Ta có: DF // AB và BG // AD

+ Trong (ABC) kẻ By_2 // AC cắt At_3 tại H, ta có BH // AC

Ta được: (DEF) // (ABC) và (BGH) // (ACD) *1đ*







• + Mặt khác: At_1, At_2, At_3 còn là các tiếp tuyến của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD tại A

$\Rightarrow$ AE, AF, AH cùng nằm trong tiếp diện (P) với (S) tại A.

Khi đó:

$$\left.\begin{matrix}(P)\cap(DEF)=EF\\ (P)\cap(ABC)=AH\\ (DEF)//(ABC)\end{matrix}\right\}\Rightarrow EF//AH \text{ và } \left.\begin{matrix}(P)\cap(BGH)=GH\\ (P)\cap(ACD)=AE\\ (BGH)//(ACD)\end{matrix}\right\}\Rightarrow GH//AE$$

Từ đó suy ra $\widehat{AEF}=\widehat{GHA}$ và $\widehat{EAF}=\widehat{HGA}$

$$\Rightarrow \Delta GHA \backsim \Delta GHA \Rightarrow \frac{EF}{HA}=\frac{AF}{GA} \qquad (1)$$

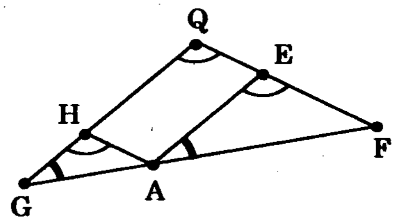
• Xét hai tam giác EAD và ACD. Ta có:

$$\widehat{EAD}=\widehat{ACD} \text{ và } \widehat{ADE}=\widehat{DAC}$$

$$\Rightarrow \Delta EAD \backsim \Delta DCA \Rightarrow \frac{EA}{DC}=\frac{AD}{CA}\Rightarrow AE=\frac{c.n}{b}$$

Lập luận tương tự, ta được: $AF=\frac{c.p}{a}$; $AH=\frac{a.m}{b}$; $AG=\frac{a.p}{c}$

và từ (1) $\Rightarrow$ $EF = HA.\dfrac{AF}{GA} = \dfrac{m.c^2}{ab}$



Do đó: ΔAEF có 3 cạnh là $AE = \dfrac{c.n}{b}$;

$AF = \dfrac{c.p}{a}$; $EF = \dfrac{mc^2}{ab}$ *1đ*

• Đặt $k = \dfrac{ab}{c}$. Ta có:

$AE = \dfrac{c.n}{b} = \dfrac{an}{k}$ $\Rightarrow u = AB.CD = a.n = k.AE$

$AF = \dfrac{c.p}{a} = \dfrac{bp}{k}$ $\Rightarrow v = AC.BD = b.p = k.AF$

$EF = \dfrac{mc^2}{ab} = \dfrac{mc}{k}$ $\Rightarrow w = AD.BC = m.c = kEF$

Vậy: $u = AB.CD$, $v = AC.BD$, $w = AD.BC$ là 3 cạnh của một tam giác, đồng dạng với ΔAEF theo tỉ số $k = \dfrac{ab}{c} = \dfrac{AB.AC}{AD}$ *1đ*

Câu 4: *(3 điểm)*

Cho tứ diện ABCD có AB = CD, AC = BD, AD = BC.

Tìm điểm M sao cho $f(M) = AM^{2008} + BM^{2008} + CM^{2008} + DM^{2008}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đáp án

• Chứng minh bổ đề: Nếu $a > 0$, $b > 0$ và $n \in N^*$ thì ta có:

$$a^n + b^n \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

+ Với n = 1: (1) hiển nhiên đúng

+ Với $n \in N^*$, $n > 1$: xét hàm số $f(x) = x^n + (c - x)^n$, $c > 0$

Ta có: $f'(x) = n\left[x^{n-1} - (c-x)^{n-1}\right] = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{c}{2}$

$$f''(x) = n(n-1)\left[x^{n-2} + (c-x)^{n-2}\right]$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{c}{2}\right) = 2x(n-1)\left(\frac{c}{2}\right)^{n-2} > 0$$

Do đó: f đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{c}{2}$ và $f_{CT} = f\left(\dfrac{c}{2}\right) = 2\left(\dfrac{c}{2}\right)^n$

$$\Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{c}{2}\right) \Rightarrow x^n + (c-x)^n \geq 2\left(\frac{c}{2}\right)^n$$

Từ đó với c = a + b và x = a thì ta có: $a^n + b^n \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ *1đ*

- Áp dụng Bổ đề: Với a > 0, b > 0, c > 0, d > 0 và $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $a^n + b^n \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ và $c^n + d^n \geq 2\left(\frac{c+d}{2}\right)^n$

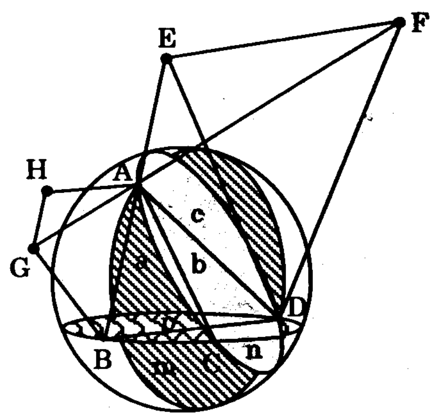
Suy ra:

$a^n + b^n + c^n + d^n \geq 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^n + \left(\frac{c+d}{2}\right)^n\right] \geq 4\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^n$ (1) *0,5đ*

- Đặt: $a = AM^2$; $b = BM^2$; $c = CM^2$; $d = DM^2$ và n = 1004. Ta có

$$\begin{aligned} f(M) &= AM^{2008} + BM^{2008} + CM^{2008} + DM^{2008} \\ &= a^{1004} + b^{1004} + c^{1004} + d^{1004} \end{aligned}$$

Theo (1) ta được: $f(M) \geq 4^{-1003}(AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2)^{1004}$ (2) *0,5đ*



- Mặt khác

+ Tứ diện ABCD có AB = CD, AC = BD, AD = BC ⇒ Tứ diện ABCD là tứ diện gần đều

  ⇒ Trọng tâm G của tứ diện cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

  ⇒ GA = GB = GC = GD = m (m > 0)

+ G là trọng tâm của tứ diện ABCD ⇔ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$+ AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2$

$$= \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GM}\right)^2$$

$$= 4GM^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$$

$$= 4(GM^2 + m^2) \qquad (3)$$ *0,5đ*

Từ (2) và (3) suy ra $f(M) \geq 4^{-1003}\left[4(GM^2 + m^2)\right]^{1004} \geq 4m^{2008}$

và $f(M) = 4m^{2008} \Leftrightarrow M \equiv G$

Vậy: f(M) nhỏ nhất khi M trùng với trọng tâm G của tứ diện ABCD *0,5đ*

Câu 5: *(4 điểm)*

Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_{n+1} = \dfrac{5x_n + 4}{x_n + 2} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Chứng minh $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \neq 4$. Tính x_{2008} và tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n)$.

Đáp án

- Chứng minh $\forall\, x \in \mathbb{N}^*$, $x_n \neq 4$ bằng phương pháp quy nạp

Ta có $x_1 = 5 \neq 4$. Giả sử $x_n \neq 4$. Ta chứng minh $x_{n+1} \neq 4$. Thật vậy,

$$x_{n+1} = 4 \Leftrightarrow \frac{5x_n + 4}{x_n + 2} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \neq -2 \\ 5x_n + 4 = 4(x_n + 2) \end{cases} \Leftrightarrow x_n = 4$$

Điều này trái với giả thiết quy nạp. *1đ*

- Khi đó:

$$x_{n+1} - 4 = \frac{5x_n + 4}{x_n + 2} - 4 = \frac{x_n - 4}{x_n + 2} \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1} - 4} = \frac{x_n + 2}{x_n - 4} = 1 + \frac{6}{x_n - 4}$$

Đặt: $y_n = \dfrac{1}{x_n - 4}$, ta có:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{x_1 - 4} = 1 \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{x_{n+1} - 4} = 1 + \dfrac{6}{x_n - 4} = 6y_n + 1 \quad (1) \end{cases}$$ *1đ*

- Chứng minh bổ đề:

Nếu dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $u_{n+1} = a.x_n + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ (*)

thì số hạng tổng quát $u_n = a^{n-1}x_1 + (a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a + 1)b$, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$ (**)

+ Theo phương pháp quy nạp, với n = 2 ta có $u_2 = au_1 + b$

+ Giả sử (**) đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$).

Ta có: $u_k = a^{k-1}x_1 + (a^{k-2} + a^{k-3} + ... + a + 1)b$

Ta sẽ chứng minh: $u_{k+1} = a^k x_1 + (a^{k-1} + a^{k-2} + ... + a + 1)b$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= au_k + b \\ &= a[a^{k-1}x_1 + (a^{k-2} + a^{k-3} + ... + a + 1)b] + b \\ &= a^k x_1 + (a^{k-1} + a^{k-2} + ... + a + 1)b \end{aligned}$$ *1đ*

• Từ (1) áp dụng bổ đề cho dãy (y_n) ta được:

$$y_n = 6^{n-1}y_1 + (6^{n-2} + 6^{n-3} + ... + 6 + 1) = \frac{6^n - 1}{5}$$

Khi đó: $y_n = \dfrac{1}{x_n - 4} \Rightarrow x_n = 4 + \dfrac{5}{6^n - 1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Vậy $\quad x_{2008} = 4 + \dfrac{5}{6^{2008} - 1}$ và $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n) = 4$ *1đ*

Câu 6: ***(3 điểm)***

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

a) $f(x) \geq 2008^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$

b) $f(x + y) \geq f(x).f(y) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$

Đáp án

• Đặt $g(x) = \dfrac{f(x)}{2008^x}$. Ta có:

$g(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$

$g(-x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4)$ *0,75đ*

$g(x + y) \geq g(x).g(y) \quad (5)$

• Với $x = y = 0$, ta lại có:

$$\left.\begin{array}{l} g(0) \geq 1 \quad (6) \\ \text{và } g(0) \geq [g(0)]^2 \Rightarrow g(0).[1 - g(0)] \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0) \leq 1 \quad (7)$$

Từ (6) và (7) $\Rightarrow g(0) = 1$. *1đ*

• Mặt khác:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = g(0) = g(x - x) \geq g(x).g(-x) \\ g(-x) \geq 1 \quad ,\forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{do } (4)) \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) \leq 1 \quad ,\forall x \in \mathbb{R} \quad (8)$$

• Từ (3) và (8) $\Rightarrow g(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Vậy: $f(x) = 2008^x$ *1đ*

• Thử lại, ta có: $f(x) = 2008^x \geq 2008^x$

$f(x + y) = 2008^{x+y} \geq 2008^{x+y} = \underbrace{2008^x}_{f(x)} . \underbrace{2008^y}_{f(y)} = f(x).f(y)$ *0,25đ*

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN HỌC 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG – TP. CẦN THƠ

Câu 1:

Giải phương trình $3x(2+\sqrt{9x^2+3})+(4x+2)(\sqrt{1+x+x^2}+1)=0$

Đáp án

Đặt $f(u)=u(2+\sqrt{u^2+3})$, $u\in\mathbf{R}$, $f'(u)=\dfrac{u^2+3+2\sqrt{u^2+3}+u^2}{\sqrt{u^2+3}}>0,\forall u$

Vậy f là hàm lẻ và đồng biến trên R.

Nên từ giả thiết ta có

$f(3x)+f(2x+1)=0\Leftrightarrow f(3x)=f(-2x-1)\Leftrightarrow 3x=-2x-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$.

Câu 2:

Cho một bàn tròn có diện tích S, được phủ kín bởi một số khăn hình tròn (các khăn hình tròn che kín hết mặt bàn). Chứng minh rằng từ đó có thể chọn ra một số khăn trải bàn đôi một không giao nhau sao cho tổng diện tích các khăn này không nhỏ hơn $\dfrac{1}{9}$ diện tích mặt bàn.

Đáp án

Trong số các khăn, chọn một khăn có bán kính lớn nhất, gọi khăn đó là K_1 và bán kính là r_1.

Những khăn có điểm chung với K_1 đều nằm trong hình tròn có tâm là tâm của K_1 và bán kính $3r_1$. Những khăn này phủ một phần mặt bàn không vượt quá

$$(3r_1)^2\pi-r_1^2\pi=8r_1^2\pi=8S_{K_1}\ (S_{K_1}\text{ là diện tích hình tròn }K_1).$$

- Ta loại các khăn có điểm chung với K_1.

Với các khăn còn lại ta cũng chọn khăn lớn nhất K_2 có bán kính r_2. Tương tự như trên đối với các khăn có điểm chung với K_2 phủ một phần mặt bàn có diện tích không vượt quá $8r_2^2\pi=8S_{K_2}$

Vì số khăn hữu hạn nên giả sử đến bước n, $n\geq 1$ ta xét hết các khăn, lúc đó các khăn K_1, K_2,..., theo cách chọn của chúng ta đôi một rời nhau và phần diện tích mặt bàn mà chúng không phủ không vượt quá $8(S_{K_1} + S_{K_2} + ... + S_{K_n})$.

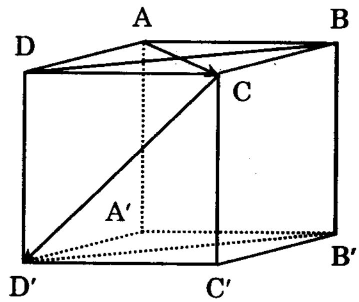
Vậy $(S_{K_1} + S_{K_2} + ... + S_{K_n}) \geq \frac{1}{9}S$

Câu 3:

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có độ dài cạnh là 1. Gọi (P) là mặt phẳng bất kì qua CD', α là góc giữa mp(P) và mp(BDD'B').

Khi α đạt giá trị nhỏ nhất, tính diện tích thiết diện giữa (P) và hình lập phương.

Đáp án



Đặt $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}, \vec{e}_3 = \overrightarrow{AA'}$,

ta có $\vec{e}_1.\vec{e}_2 = \vec{e}_2.\vec{e}_3 = \vec{e}_3.\vec{e}_1 = 0$

và $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \overrightarrow{CD'} = \vec{e}_3 - \vec{e}_1$.

* Thấy $\overrightarrow{AC}$ vuông góc với mp(BDD'B').

* Giả sử vectơ vuông góc với mặt phẳng (P) là $\vec{n} = a.\vec{e}_1 + b.\vec{e}_2 + c.\vec{e}_3$.

Do $\vec{n} \perp (P) \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{CD'} \Rightarrow (a.\vec{e}_1 + b.\vec{e}_2 + c.\vec{e}_3).(\vec{e}_3 - \vec{e}_1) = 0$

$\Leftrightarrow a - c = 0 \Rightarrow \vec{n} = a.\vec{e}_1 + b.\vec{e}_2 + a.\vec{e}_3$.

Nên $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}.\overrightarrow{AC}|}{|\vec{n}|.|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{|(a.\vec{e}_1 + b.\vec{e}_2 + a.\vec{e}_3).(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)|}{\sqrt{(a.\vec{e}_1 + b.\vec{e}_2 + a.\vec{e}_3)^2}.\sqrt{2}} = \dfrac{|a+b|}{\sqrt{2}.\sqrt{2a^2 + b^2}}$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski ta có

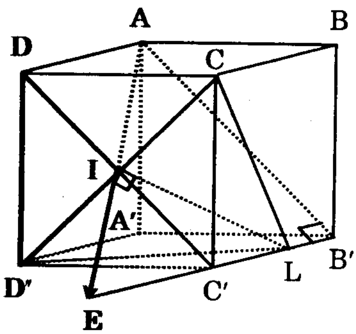
$$|a+b| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}.a) + b\right| \leq \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 1\right)(2a^2 + b^2)} = \sqrt{\frac{3}{2}}.\sqrt{2a^2 + b^2}$$

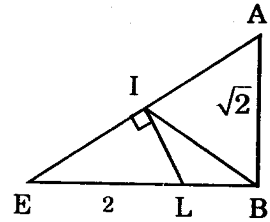
$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{|a+b|}{\sqrt{2}.\sqrt{2a^2 + b^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha \geq \frac{\pi}{6}. \ (1)$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của α là $\frac{\pi}{6}$.

Đẳng thức (1) xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{\sqrt{2}.a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{b}{1} \Leftrightarrow b = 2a$

$$\Rightarrow \vec{n} = a(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$$





Dựng được vectơ vuông góc với (P) là $\vec{n} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \overrightarrow{AE}$ như hình vẽ.

Trong mặt phẳng (AEB') dựng đường thẳng qua I và vuông góc với AE cắt EB' tại L. Dễ thấy thiết diện là tam giác CLD'.

Trong tam giác vuông AEB', $\sin E = \frac{AB'}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow \cos E = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Mà $\cos E = \frac{EI}{EL} \Rightarrow EL = EI\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow LC = LD'$. Vậy tam giác CLD' cân tại L nên

$$S_{\Delta LCD'} = \frac{1}{2}CD'.IL = IL.IC = EL.\sin E.IC = \frac{3}{2}.\sqrt{\frac{1}{3}}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Câu 4:

Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa xy + yz + zx = 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 21(x^2 + y^2) + z^2$.

Đáp án

Ta có $\begin{cases} 18x^2 + \frac{z^2}{2} \ge 6xz \\ 18y^2 + \frac{z^2}{2} \ge 6yz \\ 3(x^2 + y^2) \ge 6xy \end{cases} \Rightarrow A \ge 6$

$\Rightarrow$ **minA = 6, đạt được** $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{z}{6} \\ y = \frac{z}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{13}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{13}} \\ z = \frac{6}{\sqrt{13}} \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{13}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{13}} \\ z = -\frac{6}{\sqrt{13}} \end{cases}$

Câu 5: Cho dãy số (x_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 = c, \quad x_1 = d, \quad c, d \in R \\ x_{n+2} = \sqrt[3]{x_n} + \sqrt[3]{x_{n+1}}, \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$

Đáp án

Lập 2 dãy sau

• Dãy (a_n) với $\begin{cases} a_0 = \max\{x_0, x_1, \sqrt{8}\} \\ a_{n+1} = 2\sqrt[3]{a_n} \end{cases}$ Dãy (b_n) với $\begin{cases} b_0 = \min\{x_0, x_1, \sqrt{8}\} \\ b_{n+1} = 2\sqrt[3]{b_n} \end{cases}$

• Ta chứng minh (a_n) giảm hội tụ về $\sqrt{8}$ và (b_n) tăng hội tụ về $\sqrt{8}$.

Thật vậy, $a_0 \geq \sqrt{8}$, quy nạp ta có $a_n \geq \sqrt{8}$

Từ đó $a_{n+1} - a_n = 2\sqrt[3]{a_n} - a_n \leq 0 \Leftrightarrow 8a_n \leq a_n^3 \Leftrightarrow \sqrt{8} \leq a_n$ (đúng)

Suy ra $\lim a_n = \sqrt{8}$

Tương tự $\lim b_n = \sqrt{8}$.

Kế tiếp ta chứng minh

$$b_k \leq \min\{x_{2k}, x_{2k+1}\} \leq \max\{x_{2k}, x_{2k+1}\} \leq a_k, \forall k \in N$$

Ta chứng minh bằng quy nạp

k = 0: ta có $b_0 \leq \min\{x_0, x_1\} \leq \max\{x_0, x_1\} \leq a_0$ (đúng).

Giả sử mệnh đề đúng tới k, ta có

$$b_k \leq b_{k+1} = 2\sqrt[3]{b_k} \leq \sqrt[3]{x_{2k}} + \sqrt[3]{x_{2k+1}} = x_{2k+2} \leq 2\sqrt[3]{a_k} \leq a_{k+1} \leq a_k$$

Vậy $b_{k+1} \leq x_{2k+2} \leq a_{k+1}$ (1)

$$b_{k+1} = 2\sqrt[3]{b_k} \leq \sqrt[3]{x_{2k+1}} + \sqrt[3]{x_{2k+2}} = x_{2k+3} \leq 2\sqrt[3]{a_k} = a_{k+1}$$

Vậy $b_{k+1} \leq x_{2k+3} \leq a_{k+1}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $b_{k+1} \leq \min\{x_{2k+2}, x_{2k+3}\} \leq \max\{x_{2k+2}, x_{2k+3}\} \leq a_{k+1}$

Vậy $\lim x_{2k} = \lim x_{2k+1} = \sqrt{8} \Rightarrow \lim x_n = \sqrt{8}$.

Câu 6:

Tìm tất cả các hàm f liên tục f: $R \to R$ thoả

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \forall x, y \in R$$

Đáp án

Giả sử $f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow x + f(y_1) = x + f(y_2) \Rightarrow f(x + f(y_1)) = f(x + f(y_2))$

$\Rightarrow f(x) + y_1 = f(x) + y_2$

$\Rightarrow y_1 = y_2$. Suy ra f đơn ánh.

Hơn nữa, với mỗi x cố định, $f(x) + y$ với $y \in R$ nhận mọi giá trị thuộc R nên miền giá trị của f là R. Do đó f là song ánh; Do vậy có duy nhất $a \in R$ sao cho $f(a) = 0$.

Thay $y = a$. Trong đẳng thức đề bài, ta có

$$f(x + f(a)) = f(x) + a \Rightarrow f(x) = f(x) + a \Rightarrow a = 0.$$

Vậy $f(0) = 0$.

Thay $x = 0 \Rightarrow f((fy)) = y, \forall y \in R$.

Vậy $f(x + y) = f\left[x + f(f(y))\right] = f(x) + f(y), \forall x, y \in R$

Do f liên tục và cộng tính. Lặp lại cách giải phương trình hàm Côsi, ta có $f(x) = kx$, $k \in R$.

Từ giả thiết $f(x) = kx \Rightarrow (k^2 - 1)y = 0$, $\forall$ y

$$\Rightarrow k = \pm 1. \text{ Do đó } f(x) = \pm x.$$

Thử lại với $f(x) = \pm x$ thoả yêu cầu bài toán.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM – TP. TAM KỲ

Câu 1: *(3 điểm)*

Cho f(x) là một đa thức có hệ số thực thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < f^2(xy) \le f(x).f(y^3) + f(x^3).f(y) & \forall\ x, y \in R \\ f(2007) > 0 \end{cases}$$

Chứng minh: $f(2008) > 0$.

Đáp án

- Khi $x = y$, ta có: $0 < 2f^2(x^2) \le 2f(x).f(x^3) \Rightarrow f(x)$ và $f(x^3)$ cùng dấu, $\forall\ x \in \mathbb{R}$
- Khi $x = 0$, ta có: $\forall\ y \in \mathbb{R}$: $0 < 2f^2(0) \le f(0).f(y^3) + f(0).f(y)$

  $\Rightarrow f(0).[2f(0) - f(y^3) - f(y)] \le 0$ và $f(0) \ne 0$
- *Trường hợp 1:* $f(0) < 0$

  $$\begin{cases} 0 > 2\ f(0) \ge f(y^3) + f(y) \\ f(y).f(y^3) > 0,\ \forall\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

  $\Rightarrow f(y) < 0,\ \forall\ y \in \mathbb{R}$: mâu thuẫn với $f(2007) > 0$

  $\Rightarrow f(0) < 0$ không xảy ra
- *Trường hợp 2:* $f(0) > 0$

  $0 < 2f(0) \le f(y^3) + f(y)$

  $\Rightarrow f(y) > 0,\ \forall\ y \in \mathbb{R}$; vì $f(y)$ và $f(y^3)$ cùng dấu $\forall\ y \in \mathbb{R}$

  $\Rightarrow f(2008) > 0$

Vậy: $f(2008) > 0$ (đpcm).

Câu 2: *(4 điểm)*

Cho phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^1 - 1} + \frac{1}{x^2 - 2} + \dots + \frac{1}{x^n - n} = 0;\ n \in \mathbb{N}^*$$

1. Chứng minh rằng: Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, phương trình trên luôn có duy nhất nghiệm $x_n \in (0; 1)$.
2. Chứng minh dãy (x_n) với x_n xác định ở câu (1) có giới hạn. Tìm giới hạn đó.

Đáp án

1. • Với mỗi $n \in N^*$ đặt:

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^1 - 1} + \frac{1}{x^2 - 2} + \dots + \frac{1}{x^n - n}, \quad x \in (0;1)$$

Ta có:

$$f_n'(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x^1-1)^2} + \frac{2x}{(x^2-2)^2} + \dots + \frac{n\,x^{n-1}}{(x^n-n)^2}\right) < 0;\ x \in (0;1)$$

Suy ra: $f_n(x)$ là hàm số nghịch biến ($n \in \mathbb{N}^*$) (1)

• Hơn nữa: $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2 - \frac{4}{7} - \dots < 0$ (2)

Và: $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = +\infty \Rightarrow \exists\, x_0 \in (0;\frac{1}{2})$ sao cho: $f_n(x_0) > 0$ (3)

• Do $f_n(x)$ liên tục, nên từ (1), (2) và (3) suy ra với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, phương trình

$f_n(x) = 0$ luôn luôn có nghiệm duy nhất $x_n \in (0; 1)$.

2. • Dễ thấy $0 < x_n < 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ (4)

Hơn nữa, ta chứng minh $x_{n+1} \in (0; x_n)$. Thật vậy:

• Ta có: $f_{n+1}(x_n) = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n^1 - 1} + \frac{1}{x_n^2 - 2} + \dots + \frac{1}{x_n^n - n} + \frac{1}{x_n^{n+1} - (n+1)}$

$$= f_n(x_n) + \frac{1}{x_n^{n+1} - (n+1)} = 0 + \frac{1}{x_n^{n+1} - (n+1)} < 0 \quad (5)$$

• Và: $\lim\limits_{x \to 0^+} f_{n+1}(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^1 - 1} + \dots + \frac{1}{x^{n+1} - (n+1)}\right) = +\infty$

Suy ra tồn tại $0 < x_* < 1$ sao cho $f_{n+1}(x_*) > 0$ (5)

• Từ (4) và (5) suy ra phương trình $f_{n+1}(x) = 0$ có duy nhất nghiệm $x_{n+1} \in (0; x_n)$, và từ đó suy ra dãy (x_n) là giảm

• Hơn nữa $x_n \in (0; 1)$ bị chặn nên dãy (x_n) có giới hạn

• Ta chứng minh: $\lim x_n = 0$. Vì $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $\lim x_n \ge 0$

• Giả sử $\lim x_n = a > 0$. Khi đó $x_n \ge a$ và $\frac{1}{x_n} \le \frac{1}{a}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (do x_n là dãy giảm)

Ta có:

- $\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right) = +\infty$

nên $\exists N_0$ sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > N_0$ ta có $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{a}$,

- Với $n > N_0$ ta lại có: $\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n^1-1}+\frac{1}{x_n^2-2}+...+\frac{1}{x_n^n-n}=0$ (*)

(vì x_n là nghiệm)

- $\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n^1-1}+\frac{1}{x_n^2-2}+...+\frac{1}{x_n^n-n}<\frac{1}{x_n}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{-2}+...+\frac{1}{-n}$

$<\frac{1}{a}-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=0$

Mâu thuẫn với (*).

Vậy: $\lim x_n = a = 0$

Câu 3: ***(4 điểm)***

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.

Mặt phẳng (α) thay đổi cắt các đường thẳng AD, SA và SC lần lượt tại P, Q, R tương ứng sao cho: $\frac{AP}{AD}=\frac{SQ}{SA}=\frac{RC}{SC}$; đồng thời các điểm A, S, C hoặc nằm trên các đoạn PD, QA, SR tương ứng, hoặc cùng không nằm trên các đoạn thẳng đó. Gọi N là trung điểm của đoạn CD, M là điểm nằm trên đường thẳng SB sao cho MN // mp(α).

Chứng minh rằng quỹ tích điểm M với mọi vị trí có thể của mặt phẳng (α) là một đoạn thẳng có độ dài $\frac{\sqrt{5}}{2}$SB.

Đáp án

- Ký hiệu: $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$

Ta có: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$, $\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$

- Nếu $\overrightarrow{SQ}=x\vec{a}$, từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{RC}=x\overrightarrow{SC}=x\vec{c}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SR}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{RC}=(1-x)\vec{c}$

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{SP}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AP}=\vec{a}+x(\vec{c}-\vec{b})$

$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{SR}-\overrightarrow{SQ}=(1-x)\vec{c}-x\vec{a}$

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{SP}-\overrightarrow{SQ}=(1-x)\vec{a}+x(\vec{c}-\vec{b})$

Đồng thời các vectơ $\overrightarrow{QR}$ và $\overrightarrow{QP}$ không cùng phương với mọi **giá trị của x**

• $M \in SB \Rightarrow \overrightarrow{SM} = y\vec{b}$

$MN \,/\!/\, (\alpha) \Rightarrow \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{QR}$ và $\overrightarrow{QP}$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \lambda\overrightarrow{QR} + \mu\overrightarrow{QP}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SM} = \lambda\overrightarrow{QR} + \mu\overrightarrow{QP}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SC}\right) - \overrightarrow{SM} = \lambda\overrightarrow{QR} + \mu\overrightarrow{QP}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b} + \vec{c}\right) - y\vec{b} = \lambda\left[(1-x)\vec{c} - x\vec{a}\right] + \mu\left[(1-x)\vec{a} + x(\vec{c} - \vec{b})\right]$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\vec{a} - \left(\dfrac{1}{2} + y\right)\vec{b} + \vec{c} = \left[-\lambda x + \mu(1-x)\right]\vec{a} - \mu x\vec{b} + \left[\lambda(1-x) + \mu y\right]\vec{c}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} = -\lambda x + \mu - \mu x & (1) \\ \dfrac{1}{2} + y = -\mu x & (2) \\ 1 = \lambda - \lambda x + \mu x (3) & \end{cases}$$

Từ (1) và (3) suy ra:

$$\lambda = \frac{3x-2}{2(2x^2 - 2x + 1)} \quad ; \quad \mu = \frac{-(x+1)}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

Thay vào (2) suy ra: $y = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{x(x+1)}{2(2x^2 - 2x + 1)}$ (4)

• **Ta tìm miền giá trị** của y:

Phương trình (4) $\Leftrightarrow (4y + 1)x^2 - (4y + 3)x + (2y + 1) = 0$

• **Nếu** $y = -\dfrac{1}{4}$ **thì phương** trình (*) có nghiệm $x = \dfrac{1}{4}$

• **Nếu** $y \neq -\dfrac{1}{4}$ **thì phương** trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi:

$\Delta = (4y + 3)^2 - 4(4y + 1)(2y + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow -16y^2 + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{5}}{4} \leq y \leq \dfrac{\sqrt{5}}{4}$ $\left(y \neq -\dfrac{1}{4}\right)$

Khi $y \in \left[-\dfrac{\sqrt{5}}{4}; \dfrac{\sqrt{5}}{4}\right]$, ta có độ dài đoạn $\left[-\dfrac{\sqrt{5}}{4}; \dfrac{\sqrt{5}}{4}\right]$ là $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy: $\overrightarrow{SM} = y\overrightarrow{SB}$ **với** $y \in \left[-\dfrac{\sqrt{5}}{4}; \dfrac{\sqrt{5}}{4}\right]$.

Câu 4: *(3 điểm)*

Giải phương trình sau:

$$\log_2^2 x + 4x.\log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = \left[\frac{x}{2} + 8.\log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x})\right].\log_2 x$$

Đáp án

- Điều kiện: $x > 0$

Với điều kiện này, phương trình tương đương:

$$\left(\log_2 x - \frac{x}{2}\right).\log_2 x - 8\left(\log_2 x - \frac{x}{2}\right).\log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_2 x - \frac{x}{2}\right).\left(\log_2 x - 8.\log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x})\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \log_2 x - \dfrac{x}{2} = 0 & (1) \\ \log_2 x - 8.\log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = 0 & (2) \end{array}\right.$$

- Giải phương trình (1):
- (1) $\Leftrightarrow \log_2 x^2 = x \Leftrightarrow x^2 = 2^x \Leftrightarrow \dfrac{\ln}{x} = \dfrac{\ln 2}{2}$ (*)

Dễ thấy $x = 2$ và $x = 4$ là các nghiệm của **phương trình (*)**

- Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ $f'(x)$ suy ra: $f'(x) > 0$ với $0 < x < e$

$f'(x) = 0$ với $x = e$

$f'(x) < 0$ với $x > e$

Khi đó, vế trái của (*) là hàm số đồng biến **trên (0; e] và nghịch** biến trên $[e; +\infty)$; trong khi vế phải là hàm **hằng, nên phương** trình (*) có nhiều nhất hai nghiệm.

Vậy phương trình (*) chỉ có hai nghiệm là **$x = 2$ và $x = 4$.**

- Giải phương trình (2):
- Đặt $t = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^t$

Phương trình (2) có dạng: $t = 8.\log_6\left(2^{\frac{t}{4}} + 2^{\frac{t}{8}}\right) \Leftrightarrow 6^{\frac{t}{8}} = 2^{\frac{t}{4}} + 2^{\frac{t}{8}}$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{t}{8}}.3^{\frac{t}{8}} = 2^{\frac{t}{8}}.2^{\frac{t}{8}} + 2^{\frac{t}{8}}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{8}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{8}} \qquad (**)$$

- Ta thấy phương trình (**) có một nghiệm là: $t = 8$

Ta chứng minh $t = 8$ là nghiệm duy nhất của phương trình (**)

Thật vậy; gọi hàm số $y_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{8}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{8}}$: là hàm số luôn nghịch biến

$y_2 = 1$ là một hàm số không đổi

Suy ra hai đồ thị của hai hàm số này chỉ gặp nhau tại một điểm có hoành độ $t = 8$, hay $t = 8$ là nghiệm duy nhất của phương trình (**)

- Khi $t = 8 \Leftrightarrow x = 2^8 = 256$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $x = 2$, $x = 4$, $x = 256$.

Câu 5: *(3 điểm)*

Cho đa thức: $P(x) = a_0x^{2008} + a_1x^{2007} + a_2x^{2006} + ... + a_{2008}$ có 2008 nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng: $2007.a_1^2 > 4016.a_0a_2$

Đáp án

- Vì đa thức P(x) có 2008 nghiệm phân biệt nên $a_0 \neq 0$

  Đpcm: $2007.\ a_1^2 > 4016.a_0a_2$ (1)

$$\Leftrightarrow 2007.\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 > 4016.\left(\frac{a_2}{a_0}\right) \qquad (2)$$

- Giả sử đa thức P(x) có 2008 nghiệm phân biệt là: $x_1, x_2, x_3, ..., x_{2008}$
- Theo định lý Viet, ta có: $A = x_1 + x_2 + ... + x_{2008} = -\frac{a_1}{a_0}$

$$B = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{2007}x_{2008} = \frac{a_2}{a_0}$$

Suy ra: $A^2 = \sum_{i=1}^{2008} x_i^2 + 2B$

• Khi đó: (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ $2007.A^2 > 4016.B$

$$\Leftrightarrow 2007.\left(\sum_{i=1}^{2008} x_i^2 + 2B\right) > 4016.B$$

$$\Leftrightarrow 2007.\sum_{i=1}^{2008} x_i^2 > 2.B$$

$$\Leftrightarrow 2008.\sum_{i=1}^{2008} x_i^2 > \sum_{i=1}^{2008} x_i^2 + 2.B = A^2$$

$$\Leftrightarrow (1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2).(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2008}^2) > (x_1 + x_2 + \ldots + x_{2008})^2$$

Là bất đẳng thức luôn đúng (theo bất đẳng thức Bunhiacopski)

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Câu 6: *(3 điểm)*

Cho tam giác ABC với các góc đều nhọn. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{4^{\sin A+\sin B+\sin C}} + \sqrt[3]{2^{\tan A+\tan B+\tan C}} > 2^{1+\frac{\pi}{2}} \qquad (1)$$

Đáp án

• Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương, ta có:

$$\sqrt[3]{4^{\sin A+\sin B+\sin C}} + \sqrt[3]{2^{\tan A+\tan B+\tan C}} = 2^{\frac{2}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)} + 2^{\frac{1}{3}(\tan A+\tan B+\tan C)}$$

$$\geq 2.\sqrt{2^{\frac{2}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)+\frac{1}{3}(\tan A+\tan B+\tan C)}}$$

• Để chứng minh (1), ta chứng minh:

$$2.\sqrt{2^{\frac{2}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)+\frac{1}{3}(\tan A+\tan B+\tan C)}} > 2^{1+\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2^{\frac{2}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)+\frac{1}{3}(\tan A+\tan B+\tan C)}} > \sqrt{2^{\pi}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) + \frac{1}{3}(\tan A + \tan B + \tan C) > \pi$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\sin A + \frac{1}{3}\tan A - A\right)$$

$$+\left(\frac{2}{3}\sin B + \frac{1}{3}\tan B - B\right) + \left(\frac{2}{3}\sin C + \frac{1}{3}\tan C - C\right) > 0 \quad (2)$$

• Xét hàm số: $f(x) = \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x - x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{3}\cos x + \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$

$= \dfrac{1}{3}(\cos x + \cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x}) - 1 \geq \dfrac{1}{3}.3 - 1 = 0$

Nhưng $\cos x \neq \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\forall x \in (0; \dfrac{\pi}{2})$

$\Rightarrow f'(x) > 0$, $\forall x \in (0; \dfrac{\pi}{2}) \Rightarrow f(x)$ là hàm số luôn đồng biến trên $(0; \dfrac{\pi}{2})$

Nên $f(x) > f(0)$, $\forall x \in (0; \dfrac{\pi}{2}) \Rightarrow \dfrac{2}{3}\sin x + \dfrac{1}{3}\tan x - x > 0$, $\forall x \in (0; \dfrac{\pi}{2})$

• Khi đó, ta có: $\dfrac{2}{3}\sin A + \dfrac{1}{3}\tan A - A > 0$

$\dfrac{2}{3}\sin B + \dfrac{1}{3}\tan B - B > 0$

$\dfrac{2}{3}\sin C + \dfrac{1}{3}\tan C - C > 0$

Suy ra (2) được chứng minh

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN DU – ĐĂK LĂK

Câu 1: *(3 điểm)*

Cho dãy đa thức $\{P_n(x)\}$ được xác định bởi

$$\begin{cases} P_1(x) = x^2 - 2 \\ P_{n+1}(x) = P_n[P_1(x)], \forall n \in N^* \end{cases}.$$

Tìm tất cả các nghiệm của đa thức $P_n(x)$. Gọi S_n là tổng tất cả các nghiệm thực của đa thức $P_n(x)$. Tính S_{2008}.

Đáp án

Ta có $\deg P_n(x) = 2^n \rightarrow P_n(x) = 0$ có không quá 2^n nghiệm thực

$$y = P_1(x) = x^2 - 2 \rightarrow y' = 2x, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó nếu $|x| > 2 \Rightarrow y > 2 \Rightarrow P_2(x) = P_1[P_1(x)] > 2 \ldots TQ : P_n(x) > 2$

Nên tất cả các nghiệm của phương trình $P_n(x) = 0$ đều thuộc đoạn $[-2; 2]$. Đặt $x = 2\cos t$, $t \in [0; \pi]$

$$P_1(x) = 4\cos^2 t - 2 = 2\cos 2t \rightarrow P_2(x) = P_1^{\,2}(x) - 2$$

$$= 2\cos 2^2 t, \ldots, P_n(x) = 2\cos 2^n t, \forall n \in N^*$$

Nên $P_n(x) = 0 \Leftrightarrow 2^n t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{2^{n+1}} + \dfrac{k\pi}{2^n}, k \in Z$

$$\rightarrow x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}} + \frac{k\pi}{2^n}\right) \text{ mà}$$

$$t \in [0;\pi] \rightarrow k \in \{0;1;2;\ldots;2^n - 1\} \rightarrow S_{2008} = \sum_{k=0}^{2^{2008}-1} 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{2009}} + \frac{k\pi}{2^{2008}}\right)$$

$$\rightarrow \sin\frac{\pi}{2^{2009}} S_{2008} = \sum_{k=0}^{2^{2008}-1} 2\sin\frac{\pi}{2^{2009}}\cos\left(\frac{\pi}{2^{2009}} + \frac{k\pi}{2^{2008}}\right)$$

$$= \sum_{k}^{2^{2008}-1} \left[\sin\frac{(k+1)\pi}{2^{2008}} - \sin\frac{k\pi}{2^{2008}}\right] = 0$$

vì $\sin\frac{\pi}{2^{2009}} > 0 \to S_{2008} = 0$.

(Học sinh có thể nêu đa thức $P_n(x)$ là hàm số chẵn nên $S_{2008} = 0$)

Câu 2: *(3 điểm)*

Xác định hàm số f: $N^* \to N^*$ thỏa mãn $f[f(n) + m] = n + f(m + 2008)$ với mọi số nguyên dương m, n.

Đáp án

Chọn $m = f(1)$ có $f[f(n) + f(1) = n + f[f(1) + 2008]$

$$= n + 1 + f(4016) = f[f(n + 1) + 2008]$$

$$F[f(n) + f(1)] = f[f(n + 1) + 2008] \Rightarrow f(f[f(n) + f(1)] + m)$$

$$= f(f[f(n + 1) + 2008] + m)$$

Nên $\quad f(n) + f(1) + f(m + 2008) = f(n + 1) + 2008 + f(m + 2008)$

Suy ra $\quad f(n + 1) - f(n) = f(1) - 2008 = a$

$$\Rightarrow f(n) = \sum_{k=1}^{n-1}[f(k+1) - f(k)] + f(1) = an + 2008$$

Thử lại: $f(n) = an + 2008, f[f(n) + m] = n + f(m + 2008)$

$$\to a^2n + 2008a + am + 2008 = n + a(m + 2008) + 2008$$

Nên $\left[\begin{array}{l} a = -1 \to f(n) = -n + 2008 \to f(2009) = -1 \\ a = 1 \to f(n) = n + 2008 \end{array}\right.$

Vậy $f(n) = n + 2008$ là hàm số cần xác định.

Câu 3: *(3 điểm)*

Tìm đa thức P(x) có bậc nguyên dương, có tất cả hệ số nguyên trên đoạn [0; 8] và thỏa mãn điều kiện $P(9) = 2008^3$.

Đáp án

$$2008^3 = 8096384512 = 1 + 9.899598279$$
$$= 1 + 9.3 + 81.99955364$$
$$= 1 + 9.3 + 9^2.5 + 9^3.7 + 9^4.8 + 9^5.6 + 6.9^6 +$$
$$+ 9^8.8 + 2.9^9 + 2.9^{10} < 9^{11}.$$

Nên $\deg P(x) < 11$

Giả sử $P(x) = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + ... + a_{10}$ với a_i nguyên thuộc đoạn [0; 8] với i từ 0 đến 10

$$P(9) \equiv a_{10} \bmod(9) \equiv 1(\bmod 9) \to a_{10} = 1$$

$$a_9 \equiv \frac{P(9)-1}{9} \bmod 9 \equiv 3 \bmod 9 \to a_9 = 3$$

$$a_8 \equiv \frac{P(9)-1-3.9}{9} \bmod 9 \equiv 5 \bmod 9 \to a_8 = 5$$

$$a_7 \equiv \frac{P(9)-1-3.9-5.9^2}{9} \bmod 9 \equiv 7 \bmod 9 \to a_8 = 7$$

Tương tự $a_6 = 8, a_5 = 6, a_4 = 6, a_3 = 0, a_2 = 8, a_1 = 2, a_0 = 2$.

Vậy $P(x) = 2x^{10} + 2x^9 + 8x^8 + 6x^6 + 6x^5 + 8x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 3x + 1$.

Thử lại đa thức trên thỏa mãn tất cả giả thiết của đề.

Câu 4: ***(4 điểm)***

Xác định hình dạng của tam giác ABC có 3 góc A, B, C thỏa mãn

$$4(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}) = \tan A \tan B \tan C.$$

Đáp án

Từ giả thiết có tam giác ABC nhọn vì $\tan A\tan B\tan C > 0$ mà $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$, nên theo bất đẳng thức Côsi ta có $M = \tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$ (1). Có thể giả sử

$$0 < A \leq B \leq C < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\sin\frac{A}{2} - \sin\frac{B}{2}\right)\left(\cos\frac{B}{2} - \cos\frac{C}{2}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$N = 4(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}) \leq 4\cos\frac{B}{2} + 2\sin B$$

$$= f(B)$$

$$f'(B) = 2(-\sin\frac{B}{2} + \cos B), f'(B) = 0 \Leftrightarrow B = \frac{\pi}{3} \to N \leq 3\sqrt{3}$$

$M = N$ khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Câu 5: ***(3 điểm)***

Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình $x^y > y^x$

Đáp án

$x^y > y^x$, $x; y \in N^*$ (1)

- Với $x = 1$ và y nguyên dương thì không thỏa (1).
- Với $x = 2$ và $y > 0$. có (1) $\Leftrightarrow f(y) = 2^y - y^2 > 0$

Có $f(1) = 1 > 0; f(2) = 0; f(3) = -1; f(4) = 0, f(5) = 7 > 0$.

Xét $f(y) = 2^y - y^2, y > 5 \to f'(y) = 2^y \ln 2 - 2y, f''(y) = 2^y \ln^2 2 - 2$

$$= 2^{y-2}\ln^2 4 - 2 > 0.$$

Do đó $f'(y) > f'(5) > 0 \to f(y) > f(5) > 0$.

Trường hợp này (1) có các nghiệm (2; 1), (2; y) với y nguyên và $y \geq 5$

- Với $x \geq 3$, $y = 1$ thỏa (1).
- Với $x \geq 3$, $y = 2$: (1) $\Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow x = 3$ (do chứng minh trên và x nguyên)

  Trường hợp này (1) nghiệm (3; 2).
- Với $x, y \geq 3$. Ta có $x^y > y^x \Leftrightarrow h(x) > h(y)$, $h(t) = \dfrac{\ln t}{t}$, $t \in [3; +\infty)$

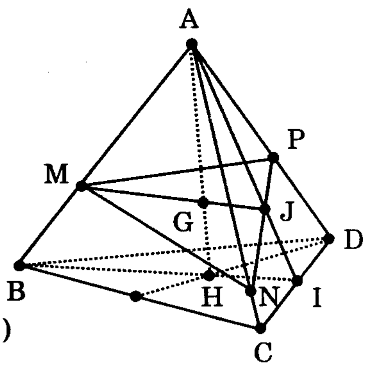
$\to h'(t) = \dfrac{1 - \ln t}{t^2} < 0 \to 3 \leq x < y$

Tập nghiệm của (1) là $S = \{(x; 1), (2; y), (3; 2), (m; n)$ với $(x, y, m, n \in N$, $x \geq 1$, $y \geq 5$, $3 \leq m < n\}$.

Câu 6: *(4 điểm)*

Cho tứ diện đều ABCD cạnh a có G là trọng tâm của tứ diện. Một mặt phẳng (P) thay đổi qua G và cắt 3 cạnh AB, AC, AD lần lượt tại M, N, P. Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện AMNP.

Đáp án



Đặt AB = xAM, AC = yAN, AD = zAP, gọi H là trọng tâm tam giác BCD. Ta có

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{x}{4}\overrightarrow{AM} + \frac{y}{4}\overrightarrow{AN} + \frac{z}{4}\overrightarrow{AP}, G \in (MNP)$$

$\to x + y + z = 4, x, y, z \in [1;4]$

(bài tập 5 SGK HH11 nâng cao trang 91)

Và $V(AMNP) = \dfrac{1}{xyz}V(ABCD)$

$$= \frac{1}{xyz}.\frac{a^3\sqrt{2}}{12} \geq \left(\frac{3}{x+y+z}\right)^3.\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{256}$$

Nên $\text{MinV}(AMNP) = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{256} \Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow (MNP) // (BCD)$

Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z \leq 4 \to xyz \geq 1.y.(x + z - 1)$ do $(xy - 1)(z - 1) \geq 0$

$y(x + z - 1) = (4 - t)(t - 1) = -t^2 + 5t - 4 = -(t - 2)(t - 3) + 2 \geq 2$,

$t = x + z \in [2;3]$

$\text{MaxV}(AMNP) = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{24} \Leftrightarrow x = y = 1,\ z = 2 \Leftrightarrow M \equiv B, N \equiv C, AP = PD.$

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN LỚP 11

TRƯỜNG THPT PHAN CHÂU TRINH – ĐÀ NẴNG

Câu 1:

Cho hai dãy số dương (x_n) và (y_n) được xác định bởi:

$$x_1 = y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2};\ x_{n+1} = \frac{x_n}{4y_{n+1}^2 - 1} \text{ và } y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - 4x_{n+1}^2} \text{ với mọi } n \geq 1$$

Tính $\lim x_n$ và $\lim y_n$.

Đáp án

- Ta chứng minh $x_n^2 + y_n^2 = 1$ với $\forall n \geq 1$
- Khi n = 1: VT = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ = VP
- Giả sử đẳng thức đúng khi n = k

Ta có: $x_k^2 + y_k^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \left[x_{k+1}(4y_{k+1}^2 - 1)\right]^2 + \left[y_{k+1}(1 - 4x_{k+1}^2)\right]^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 - 1\right)\left(16x_{k+1}^2 y_{k+1}^2 + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 = 1 \text{ (đpcm)}$$

- Đặt $x_n = \sin\alpha_n \Rightarrow y_n = \cos\alpha_n$ với $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \sin\alpha_{n+1} = \frac{\sin\alpha_n}{4\cos^2\alpha_{n+1} - 1}$$

$$\Rightarrow \sin 3\alpha_{n+1} = \sin\alpha_n$$

Suy ra $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{3}$

- Chứng minh quy nạp $x_n = \sin\frac{\pi}{4.3^{n-1}}$ và $y_n = \cos\frac{\pi}{4.3^{n-1}}$ với mọi $\forall n \geq 1$
- Kết luận: $\lim x_n = 0$; $\lim y_n = 1$.

Câu 2:

Giải phương trình: $\cos 5x + \cos x = \sin 3x - \cos 3x$.

Đáp án

- Nếu $x = k\pi$, $k \in Z$:

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN LỚP 11

TRƯỜNG THPT PHAN CHÂU TRINH – ĐÀ NẴNG

Câu 1:

Cho hai dãy số dương (x_n) và (y_n) được xác định bởi:

$$x_1 = y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2};\ x_{n+1} = \frac{x_n}{4y_{n+1}^2 - 1} \text{ và } y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - 4x_{n+1}^2} \text{ với mọi } n \geq 1$$

Tính $\lim x_n$ và $\lim y_n$.

Đáp án

• Ta chứng minh $x_n^2 + y_n^2 = 1$ với $\forall n \geq 1$

• Khi n = 1: VT = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 =$ VP

• Giả sử đẳng thức đúng khi n = k

Ta có: $x_k^2 + y_k^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \left[x_{k+1}(4y_{k+1}^2 - 1)\right]^2 + \left[y_{k+1}(1 - 4x_{k+1}^2)\right]^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 - 1\right)\left(16x_{k+1}^2 y_{k+1}^2 + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 = 1 \text{ (đpcm)}$$

• Đặt $x_n = \sin\alpha_n \Rightarrow y_n = \cos\alpha_n$ với $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \sin\alpha_{n+1} = \frac{\sin\alpha_n}{4\cos^2\alpha_{n+1} - 1}$$

$$\Rightarrow \sin 3\alpha_{n+1} = \sin\alpha_n$$

Suy ra $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{3}$

• Chứng minh quy nạp $x_n = \sin\frac{\pi}{4.3^{n-1}}$ và $y_n = \cos\frac{\pi}{4.3^{n-1}}$ với mọi $\forall n \geq 1$

• Kết luận: $\lim x_n = 0$; $\lim y_n = 1$.

Câu 2:

Giải phương trình: cos5x + cosx = sin3x – cos3x.

Đáp án

• Nếu $x = k\pi$, $k \in Z$:

$$VT = \cos 5k\pi + \cos k\pi = \begin{cases} -2 \text{ khi k lẻ} \\ 2 \text{ khi k chẵn} \end{cases}$$

$$VP = \sin 3k\pi - \cos 3k\pi = \begin{cases} 1 \text{ khi k lẻ} \\ -1 \text{ khi k chẵn} \end{cases}$$

Vậy phương trình không có nghiệm $x = k\pi$

- **Nếu $x \neq k\pi$: nhân hai vế** phương trình cho $2\sin x \neq 0$ ta có:

$$\sin 6x - \sin 4x + \sin 2x = -\cos 4x + \cos 2x - \sin 4x + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 3x - 2\sin 3x\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x(\cos 3x - \sin x) = 0$$

- $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{3}$

- $\cos 3x = \sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$

- **Kết luận: Nghiệm của** phương trình $x = \dfrac{k\pi}{3}$, $k \neq 3h$, $h \in Z$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{2};\ x = -\frac{\pi}{4} + m\pi;\ m \in Z$$

Câu 3:

Chứng minh rằng trong tam giác ABC bất kì thì

$$\sin A\cos B + \sin B\cos C + \sin C\cos A \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Đáp án

- **Xét** $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$ với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$
- $f'(x) = \cos x + \cos 2x = (\cos x + 1)(2\cos x - 1)$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$

x	$-\infty$	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
f'(x)		||	+	0	−	||	
f(x)		||	↗		↘	||	

Suy ra $f(x) \le f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

- Đặt P = sinA cosB + sinB cosC + sinC cosA

Giả sử A = Min {A; B; C}

- Nếu $A \le B \le C$ thì $0 < B < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow (\sin A - \sin B)(\cos B - \cos C) \le 0$

$\Rightarrow \sin A\cos B + \sin B\cos C \le \sin A\cos C + \sin B\cos B$

$P \le \sin A\cos C + \sin C\cos A + \frac{1}{2}\sin 2B = \sin B + \frac{1}{2}\sin 2B \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$

- Nếu $A \le C \le B$: chứng minh tương tự $P \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$
- Đẳng thức xảy ra: ΔABC đều

Câu 4:

Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định nằm trên đường tròn đó. Với mỗi điểm M nằm ngoài đường tròn (O; R), ta kẻ tiếp tuyến MT với đường tròn (O; R) (T là tiếp điểm). Tìm tập hợp các điểm M sao cho MT = kMA, trong đó k là số dương cho trước.

Đáp án

- Gọi A' là giao điểm thứ hai của MA với (O; R)

$MT^2 = MA.\,MA' \Leftrightarrow k^2 MA^2 = MA.\,MA'$

$\Leftrightarrow MA(MA' - k^2MA) = 0$

$\Leftrightarrow MA' = k^2 MA$ (vì $MA \neq 0$)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA'} = k^2\overrightarrow{MA}$ (vì $\overrightarrow{MA'}$ cùng hướng $\overrightarrow{MA}$)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} = k^2\overrightarrow{MA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = (1 - k^2)\overrightarrow{AM}$

- Nếu k = 1 thì $A \equiv A'$

Vậy tập hợp các điểm M là tiếp tuyến của (O; R) tại A.

- Nếu $k \neq 1$ thì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1-k^2}\overrightarrow{AA'}$

Suy ra $V\left(A; \frac{1}{1-k^2}\right): A' \mapsto M$

Mà $A' \in (O; R)$ nên tập hợp các điểm M là đường tròn $\left(O'; \frac{1}{|1-k^2|}R\right)$ ảnh của đường tròn O; R) qua $V\left(A; \frac{1}{1-k^2}\right)$.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN LỚP 11

TRƯỜNG THPT QUỐC HỌC HUẾ – TỈNH THỪA THIÊN –HUẾ

Câu 1:

Giải phương trình $(2\cos 3x + 6\cos x + 1)^3 = 162\cos x - 27$.

Đáp án

Viết lại phương trình

$$(2\cos 3x + 6\cos x + 1)^3 = 162\cos x - 27$$

$$\Leftrightarrow \left(2\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) + 6\cos x + 1\right)^3 = 27(6\cos x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3 x + 1 = 3\sqrt[3]{6\cos x - 1}$$

Đặt $t = 2\cos x$, $|t| \le 2$, ta có $t^3 + 1 = 3\sqrt[3]{3t - 1}$.

Lại đặt $u = \sqrt[3]{3t-1}$, ta có hệ $\begin{cases} t^3 = 3u - 1 \\ u^3 = 3t - 1 \end{cases}$

Trừ hai phương trình theo vế ta có $t^3 - u^3 = 3(u - t)$

$$\Leftrightarrow (t-u)\left(t^2 + tu + u^2 + 3\right) = 0.$$

Từ đó suy ra $t = u \Leftrightarrow t^3 - 3t + 1 = 0$.

Vậy $8\cos^3 x - 6\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 2:

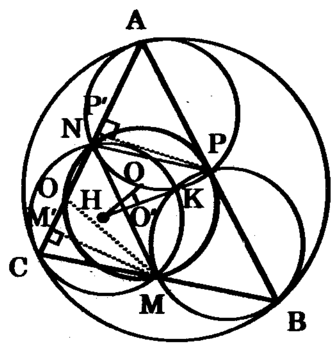
Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^0$, $\widehat{B} = 45^0$. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy các điểm M, N, P khác A, B, C. Gọi O là tâm đường tròn qua M, N, P. Chứng minh rằng nếu $\widehat{NMP} = 60^0$, $\widehat{MNP} = 45^0$ thì O cách đều các trực tâm của các tam giác MNP và ABC.

Đáp án

+ Gọi K là trực tâm tam giác MNP. Ta chứng minh K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có bốn đường tròn (MNP), (KMN), (KNP), (KPM) có cùng bán kính R.

Đường tròn (KMN) qua C, KC = $2R\sin\widehat{KNC}$. Đường tròn (KNP) qua A, KA = $2R\sin\widehat{KNA}$.

Do $\sin\widehat{KNC} = \sin\widehat{KNA}$ nên KC = KA. Tương tự KA = KB.



+ Do hai tam giác MNP và ABC đồng dạng nên có phép đồng dạng f biến A thành M, biến B thành N, biến C thành P. f là hợp của phép vị tự tâm I tỉ số k và phép quay tâm I góc θ.

Gọi M', P' là hình chiếu lần lượt của M, P lên AC.

Ta có $M'P' = MP|\cos\theta|$ và $MP = kAC$.

+ Chú ý AC = 2M'P'. Thật vậy, đường tròn (MNP) cắt AC tại Q. Ta có tam giác CMQ cân tại M, tam giác APQ cân tại P.

Do đó $AC = AQ + QC = 2QP' + 2QM' = 2M'P'$. Vì vậy $2k|\cos\theta| = 1$.

+ Ta có f biến K thành O, biến trực tâm H của tam giác ABC thành K nên OK = kKH và góc giữa OK và KH là θ. Gọi O' là hình chiếu của O lên KH. Ta có $2KO' = 2OK|\cos\theta| = 2k|\cos\theta|KH = KH$.

Vậy O' là trung điểm KH. Do đó OK = OH.

Câu 3:

Kí hiệu Z là tập hợp tất cả các số nguyên. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sao cho

$$2008f(f(x)) + 2007x = 4015f(x), \text{ với mọi } x \in \mathbb{Z}$$

Đáp án

Cho $x \in \mathbb{Z}$. Xét dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = x \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Ta có hệ thức truy hồi

$$2008u_{n+2} + 2007u_n = 4015u_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 2008u_{n+2} - 4015u_{n+1} + 2007u_n = 0$$

Dãy số (u_n) là dãy sai phân tuyến tính cấp hai có phương trình đặc trưng $2008t^2 - 4015t + 2007 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt $t_1 = 1, t_2 = \dfrac{2007}{2008}$. Do đó số hạng tổng quát của dãy là

Câu 5:

Với $x \geq 1$, đặt $f(x) = \dfrac{\sqrt{[x]} + \sqrt{\{x\}}}{\sqrt{x}}$, trong đó [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x và $\{x\} = x - [x]$. Cho $x_0 \geq 1$. Xét dãy (x_n) xác định bởi $x_n = f(x_{n-1})$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Đáp án

Đặt u = [x] và v = {x}. Ta có $f(x) = \dfrac{\sqrt{u} + \sqrt{v}}{\sqrt{x}}$.

Suy ra $(f(x))^2 = \dfrac{u + v + 2\sqrt{uv}}{x} = 1 + \dfrac{2\sqrt{uv}}{x} \geq 1$. Mà $\sqrt{uv} < \dfrac{u+v}{2} = \dfrac{1}{2}x$ (chú ý rằng $u \neq v$). Do đó $(f(x))^2 < 2$. Vậy $1 \leq f(x) < \sqrt{2}$.

Nhận xét rằng $1 \leq x_n < \sqrt{2}$, với mọi $n \in \mathbb{Z}^*$. Có thể xem $1 \leq x_0 < \sqrt{2}$.

Nếu $x_0 = 1$ thì $x_n = 1$, với mọi $n \in \mathbb{Z}^*$. Suy ra $\lim x_n = 1$.

Xét trường hợp $1 < x_0 < \sqrt{2}$. Với $1 < x < \sqrt{2}$ thì [x] = 1 và {x} = x – 1. Do đó $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$.

Rõ ràng f liên tục nên nếu dãy (x_n) có giới hạn là a thì a = f(a) (1).

Lại có $f'(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x(x-1)}} > 0$, với mọi $x \in (1, \sqrt{2})$ nên f đồng biến trên khoảng $(1, \sqrt{2})$.

$f(1,2) < 1,2; f(1,44) > 1,44$. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất trong khoảng $(1, \sqrt{2})$.

Từ đó suy ra f(x) > x nếu 1 < x < a và f(x) < x nếu $a < x < \sqrt{2}$.

+ Nếu $x_0 = a$ thì $x_n = a$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra (x_n) có giới hạn là a.

+ Nếu $1 < x_0 < a$ thì (x_n) là dãy số tăng và bị chặn trên bởi a, nên có giới hạn là a.

+ Nếu $a < x_0 < \sqrt{2}$ thì (x_n) là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi a, nên có giới hạn là a.

Câu 6:

Cho lưới ô vuông đơn vị kích thước $(n^2+n+1)\times(n^2+n+1)$. Trên mỗi ô của lưới có ghi một số 0 hoặc một số 1, sao cho không có bốn số 1 nào là đỉnh của một hình chữ nhật. Chứng minh rằng tổng các số có trong lưới không vượt quá $(n + 1) \times (n^2 + n + 1)$.

Đáp án

Đặt $N = n^2 + n + 1$. Gọi x_i là số số 1 ở hàng thứ i, $i=\overline{1,N}$. Đặt $S=\sum_{i=1}^{N} x_i$. Cần chứng minh $S \le (n + 1)N$.

Xét tập M gồm các cặp (k, l) với $1 \le k \le l \le N$. Ta có $|M| = C_N^2 = \dfrac{(n^2+n)(n^2+n+1)}{2}$.

Với mỗi i, $i=\overline{1,N}$, đặt M_i là tập gồm các cặp (k, l) với $1 \le k \le l \le N$, sao cho hai cột k và l của lưới đều có số 1 ở hàng thứ i. Ta có

$$|M_i| = \begin{cases} C_{x_i}^2 & x_i \ge 2 \\ 0 & 0 \le x_i < 2 \end{cases} = \frac{x_i(x_i-1)}{2}.$$

Từ giả thiết không có bốn số 1 nào là đỉnh của một hình chữ nhật nên $M_i \cap M_j = \varnothing$ nếu $i \ne j$.

Rõ ràng $\bigcup_{i=1}^{N} M_i \subset M$ nên $\sum_{i=1}^{N} |M_i| \le |M|$, tức là

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i(x_i-1)}{2} \le \frac{(n^2+n)(n^2+n+1)}{2}, \text{ hay}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i - (n^2+n)(n^2+n+1) \le 0.$$

Mà $\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 \le (n^2+n+1)\sum_{i=1}^{N} x_i^2$.

Suy ra $S^2 - (n^2+n+1)S - (n^2+n)(n^2+n+1)^2 \le 0$.

Từ đó $S \le \dfrac{n^2+n+1+(2n+1)(n^2+n+1)}{2} = (n+1)(n^2+n+1)$ **(đpcm).**

Câu 7:

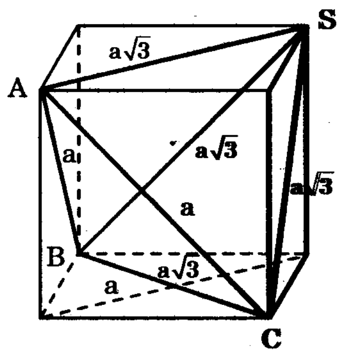
Cho hình chóp S.ABC có AB = BC = CA = a, SA = SB = SC = $a\sqrt{3}$. Chứng minh rằng với mọi điểm M trong không gian thì tổng các khoảng cách từ M đến tất cả các đường thẳng chứa cạnh bên hay cạnh đáy của hình chóp S.ABC luôn lớn hơn hoặc bằng $a\sqrt{6}$.

Đáp án

+ Ba cặp mặt phẳng song song lần lượt chứa các cặp cạnh SA và BC, SB và CA, SC và AB tạo thành một hình hộp (H) ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

+ (H) có các mặt là các hình thoi với hai đường chéo của hình thoi này là a và $a\sqrt{3}$, cạnh a. Khoảng cách giữa hai mặt song song của (H) cùng bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

+ Tổng khoảng cách T của bài toán lớn hơn hoặc bằng ba lần khoảng cách giữa hai mặt song song của (H). Vì vậy $T \geq 3\ \frac{a\sqrt{6}}{3}$ $= a\sqrt{6}$. Dấu đẳng thức xảy ra trong trường hợp M là tâm của hình hộp (H).



ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 11

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN THĂNG LONG – LÂM ĐỒNG

Câu 1: *(4 điểm)*

Cho dãy hàm số $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau đây:

1. $f_n(x)$: $(0; +\infty) \to (0; +\infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
2. $f_0(x) = x$, $\forall x \in (0; +\infty)$
3. $f_{n+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_n(x)}$, $\forall x \in (0; +\infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$ tồn tại duy nhất $x_n \in (0; +\infty)$ thỏa mãn $f_n(x_n) = 2x_n$ và dãy $\{x_n\}$ tăng có giới hạn bằng 4 khi n tiến đến vô cùng.

Đáp án

Bằng quy nạp theo n, ta có thể chứng minh dễ dàng các tính chất sau đây:

(1) $f_n(x)$ liên tục và $f_n(x) > 0$, $\forall x \in (0; +\infty)$

(2) $f_n(x)$ là hàm tăng và $f_n(4) < 8$

(3) $\dfrac{f_{n+1}(x)}{x}$ là hàm giảm

Ta có: $f_1(x_1) = \sqrt{x_1^2 + 6x_1} = 2x_1 \Leftrightarrow x_1 = 2$

$$f_2(x_1) = \sqrt{x_1^2 + 6f_1(x_1)} = \sqrt{x_1^2 + 12x_1} > 2x_1 \text{ do } x_1 = 2 < 4$$

Vậy $\dfrac{f_2(x_1)}{x_1} > 2$. Mặt khác, do nhận xét (2) ta có: $\dfrac{f_2(4)}{4} < 2$

Vì $f_2(x)$ liên tục nên tồn tại $x_2 \in (x_1; 4)$ sao cho $f_2(x_2) = 2x_2$.

Do (3) nên x_2 duy nhất. Hoàn toàn tương tự như thế ta xây dựng được dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn bài toán và: $2 = x_1 < x_2 < \dots < 4$

Đặt $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ thì $\alpha \leq 4$

Theo nhận xét (2) thì:

$$2x_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) > f_{n+1}(x_n) = \sqrt{x_n^2 + 6f_n(x_n)} = \sqrt{x_n^2 + 12x_{n-1}}$$

Suy ra: $2\alpha \geq \sqrt{\alpha^2 + 12\alpha} \Rightarrow \alpha \geq 4$

Bài toán đã được chứng minh.

Câu 2: *(4 điểm)*

Tìm số n nguyên dương nhỏ nhất sao cho $3^n - 1$ chia hết cho 2^{2008}.

Đáp án

Biểu diễn: $n = 2^m.k$ ($m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ và k lẻ)

Khi đó: $3^n - 1 = (3^{2^m.k} - 1) = (3^{2^m})^k - 1$

$$= (3^{2^m} - 1)\cdot\left[\left(3^{2^m}\right)^{k-1} + \left(3^{2^m}\right)^{k-2} + \ldots + 3^{2^m} + 1\right]$$

Do k lẻ nên k – 1 chẵn, suy ra:

$$A = \left(3^{2^m}\right)^{k-1} + \left(3^{2^m}\right)^{k-2} + \ldots + \left(3^{2^m}\right) + 1 \text{ là số lẻ}$$

Suy ra $3^n - 1$ chia hết cho $2^{2008} \Leftrightarrow (3^{2^m} - 1)$ chia hết cho 2^{2008}

Mặt khác ta có:

$$3^{2^m} - 1 = (3^{2^{m-1}} + 1)(3^{2^{m-2}} + 1)\ldots(3^2 + 1)(3^2 - 1)$$

Ta đi chứng minh $(3^2)^l + 1$ chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4 với mọi l thuộc N

Thật vậy: $(3^2)^l + 1 = (3^l)^2 - 1 + 2 = (3^l + 1)(3^l - 1) + 2$

Vì $\begin{cases} 3^l + 1 \vdots 2 \\ 3^l - 1 \vdots 2 \end{cases}$ nên $(3^l + 1)(3^l - 1)$ chia hết cho 4.

Suy ra $(3^2)^l + 1$ chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4 hay $3^{2m-1} + 1, 3^{2m-2} + 1, \ldots, 3^2 + 1$ chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4.

Riêng $3^2 - 1 = 8 = 2^3$

Vậy $3^{2^m} - 1$ chứa đúng $(m - 1) + 3 = m + 2$ thừa số 2

Với n nguyên dương nhỏ nhất sao cho $(3^n - 1)$ chia hết cho 2^{2008}

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 = 2008 \\ k = 1 \end{cases}$$

Vậy $n = 2^{2006}$ là số cần tìm.

Câu 3: *(4 điểm)*

Tám ca sĩ tham dự một cuộc hội diễn, họ biểu diễn m bài hát. Mỗi bài hát được 4 ca sĩ trình bày, mỗi cặp ca sĩ thì hát chung với nhau một số bài hát. Tìm số m bé nhất để điều này có thể thực hiện được.

Đáp án

Số m bé nhất cần tìm là 14.

Thật vậy, gọi r là số các bài hát mà mỗi cặp ca sĩ hát chung, ta có

$mC_4^2 = rC_8^2$, suy ra $m = \dfrac{14r}{3}$. Từ đó, $m \geq 14$.

Mặt khác, m = 14 thực sự có khả năng xảy ra, như sắp xếp sau đây:

{1, 2, 3, 4} {5, 6, 7, 8} {1, 2, 5, 6}
{3, 4, 7, 8} {3, 4, 5, 6} {1, 3, 5, 7}
{2, 4, 6, 8} {1, 3, 6, 8} {2, 4, 5, 7}
{1, 4, 5, 8} {2, 3, 6, 7} {1, 4, 6, 7}
{1, 2, 7, 8} {2, 3, 5, 8}

Câu 4:

Tìm tất cả các hàm liên tục $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(xf(y)) = y(f(x))$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Đáp án

Với x = 1 thì $yf(1) = f(f(y))$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$

Với $x = t$, $y = 1$ thì $f(t) = f(tf(1))$.

Từ đó nếu đặt $t = xy$ thì:

$$F(xy) = f(x)f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Do đó: $f(x)[1 - f(1)] = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

1. Nếu $f(1) \neq 1$ thì $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2. Xét trường hợp $f(1) = 1$. Do (*) ta có: $f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$

Suy ra $f(x) \neq 0$, $\forall\, x \neq 0$ và $f(x^2) = [f(x)]^2 > 0$, do đó ta có: $f(-1) = -1$

Suy ra $f(-x) = f(xf(-1)) = -f(x)$

Vậy f là hàm lẻ. Vì vậy, ta chỉ cần xét với $x \geq 0$

Với $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$, đặt $x = e^u$; $y = e^v$ và $g(t) = f(e^t)$ thì g(t) là hàm liên tục trên $\mathbb{R}^+$ và $g(u+v) = g(u)g(v)$.

Do đó $g(t) = a^t$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Suy ra $f(x) = f(e^n) = g(u) = a^u = a^{\ln u} = x^{\ln a} = x^\alpha$.

Trong đó α là hằng số.

Thử lại nếu điều kiện của bài toán suy ra $\alpha = \pm 1$, tức là $f(x) = x$ hoặc $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Do f(x) là hàm liên tục nên $f(x) = x$.

Vậy, các hàm $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = x$ thỏa mãn bài ra.

Câu 5: *(4 điểm)*

Cho hình chóp OABC có góc tam diện đỉnh O là tam diện vuông. M là điểm thuộc mặt đáy ABC.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{AM^2}{AO^2} + \frac{BM^2}{BO^2} + \frac{CM^2}{CO^2}$.

Đáp án

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ là các vectơ cơ sở.

Ta có: $\overrightarrow{OM} = x.\vec{a} + y.\vec{b} + z.\vec{c}$ với $x + y + z = 1$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = (x-1).\vec{a} + y.\vec{b} + z.\vec{c}$$

Suy ra $AM^2 = (x-1)^2.\vec{a}^2 + y^2.\vec{b}^2 + z^2.\vec{c}^2$

Do đó $\frac{AM^2}{a^2} = (x-1)^2 + y^2.\frac{b^2}{a^2} + z^2.\frac{c^2}{a^2}$

Tương tự

$$\frac{BM^2}{b^2} = x^2\frac{a^2}{b^2} + (y-1)^2 + z^2.\frac{c^2}{b^2} \text{ và } \frac{CM^2}{c^2} = x^2\frac{a^2}{c^2} + y^2.\frac{b^2}{c^2} + (z-1)^2$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế ta có:

$$\frac{AM^2}{AO^2} + \frac{BM^2}{BO^2} + \frac{CM^2}{CO^2} =$$

$$= x^2a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + y^2b^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + z^2c^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) +$$

$$+ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + (x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2) - (x^2 + y^2 + z^2) +$$

$$+ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1^2)$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + (x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2) - 2(x + y + z) + 3$$

Xét tứ diện OABC, nếu gọi OH là đường cao thì:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{OH^2} \text{ và } x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2 = OM^2$$

Do đó $\frac{AM^2}{AO^2} + \frac{BM^2}{BO^2} + \frac{CM^2}{CO^2} = \frac{OM^2}{OH^2} + 1 \geq 2$

Dấu đẳng thức xảy ra khi OM = OH hay $M \equiv H$ và giá trị nhỏ nhất cần tìm là 2.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 1: ***(... điểm)***

Cho f(x) là một đa thức có bậc n. Chứng minh rằng f(x) chia hết cho f'(x) khi và chỉ khi f(x) có dạng $a_n(x - x_0)^n$, với x_0 nào đó.

Đáp án

+ Nếu $f(x) = a_n(x - x_0)^n$. Hiển nhiên f(x) chia hết cho $f'(x) = na_n(x - x_0)^n$.

+ Ngược lại nếu f(x) chia hết cho f'(x) thì thương là một đa thức bậc nhất với hệ số cao nhất là $\frac{1}{n}$, với n là bậc của f(x).

Vì vậy $nf(x) = (x - x_0)f'(x)$.

Tương tự, ta có
$$(n-1)f'(x) = (x - x_0)f''(x),$$
$$(n-2)f''(x) = (x - x_0)f'''(x),$$
$$\ldots\ldots$$
$$f^{(n-1)}(x) = (x - x_0)f^{(n)}(x).$$

Nhân các đẳng thức trên vế theo vế, rút gọn ta được
$$n!f(x) = (x - x_0)^n f^{(n)}(x).$$

Do đó $f(x) = \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0) = a_n(x - x_0)^n$.

Câu 2: ***(... điểm)***

Cho tam giác ABC, H là chân đường cao hạ từ A xuống BC và hai góc B, C nhọn.

Gọi p_1, p_2 là nửa chu vi các tam giác ABH, ACH.

Giả sử $\left[\dfrac{h.(\sin A + \sin B + \sin C)}{2\sin B.\sin C}\right]^2 = p_1^2 + p_2^2$ với h = AH.

Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

Đáp án

Ta có: $p_1 = \dfrac{1}{2}(AB + BH + AH) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{AH}{\sin B} + AH.\cot B + AH\right)$

$$= \frac{h}{2}\left(1 + \cot\frac{B}{2}\right)$$

$$p_2 = \frac{1}{2}(AC + CH + AH) = \frac{1}{2}\left(\frac{AH}{\sin C} + AH.\cot C + AH\right)$$
$$= \frac{h}{2}\left(1 + \cot\frac{C}{2}\right).$$
$$\frac{h.(\sin A + \sin B + \sin C)}{2\sin B.\sin C} = \frac{h}{2}\left(\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} + \frac{\sin(B + C)}{\sin B.\sin C}\right)$$
$$= \frac{h}{2}\left(\frac{1}{\sin B} + \cot B + \frac{1}{\sin C} + \cot C\right)$$
$$= \frac{h}{2}\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

Do đó: $\left[\dfrac{h.(\sin A + \sin B + \sin C)}{2\sin B.\sin C}\right]^2 = p_1^2 + p_2^2$

$$\Leftrightarrow \left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)^2 = \left(1 + \cot\frac{B}{2}\right)^2 + \left(1 + \cot\frac{C}{2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2} = 1 + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cot\frac{B + C}{2} = 1 \Leftrightarrow A + C = 90^0 \Rightarrow A = 90^0.$$

Câu 3: ***(... điểm)***

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2u_n - u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 1} \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

Chứng minh rằng u_n nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Đáp án

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2u_n - u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 1} \Leftrightarrow u_{n+1} + 1 = \frac{(u_n + 1)^2 + 2}{u_{n-1} + 1}$$

Đặt $x_n = u_n + 1$, dãy số đã cho viết lại $\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 2}{x_{n-1}} \end{cases} \quad (n \geq 2)$

Ta chứng minh dãy (x_n) nguyên.

* Với $n = 2$, $x_3 = 3 \in \mathbb{Z}$

* Giả sử mệnh đề đúng $\forall\ n = k \geq 2$, tức là $x_{k+1} \in \mathbb{Z}$, ta chứng minh $x_{k+2} \in \mathbb{Z}$.

Ta có $x_{k+1}x_{k-1} = x_k^2 + 2$, $x_{k+2}x_k = x_{k+1}^2 + 2$

$\Rightarrow x_{k+2}x_k - x_{k+1}x_{k-1} = x_{k+1}^2 - x_k^2$

$$\Rightarrow \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k-1}} = \frac{x_{k+1}}{x_{k+2} + x_k}$$

Tương tự, ta được: $\dfrac{x_k}{x_{k+1} + x_{k-1}} = \dfrac{x_{k-1}}{x_k + x_{k-2}} = \ldots = \dfrac{x_2}{x_3 + x_1} = \dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{x_{k+1}}{x_{k+2} + x_k} = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{k+2} = 4x_{k+1} - x_k$$

Theo giả thiết quy nạp $x_k, x_{k+1} \in \mathbb{Z}$ nên $x_{k+2} \in \mathbb{Z}$

Suy ra đpcm.

Câu 4: *(... điểm)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (1 + 4^{2x-y}).5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$

Đáp án

Điều kiện $y^2 + 2x > 0$.

Đặt $t = 2x - y$ thì phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$(1 + 4^t).5^{1-t} = 1 + 2^{t+1} \Leftrightarrow \frac{1 + 4^t}{5^t} = \frac{1 + 2^{t+1}}{5} \qquad (1)$$

Vế trái là hàm nghịch biến còn vế phải là hàm đồng biến nên $t = 1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Vậy $2x - y = 1 \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{2}$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được $y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0$ (2)

Vế trái của (2) là hàm đồng biến do đó $y = -1$ là nghiệm duy nhất của (2).

Vậy $x = 0$, $y = -1$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Câu 5: *(... điểm)*

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sao cho:

$$f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \text{ và } f(x + y) + 1 = f(x) + f(y).$$

Đáp án

Từ $f(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow f(-1) = -f(-1) \Rightarrow f(-1) = 0$

Do đó: $f(x-1) = f(x+(-1)) = f(x) + f(-1) - 1 = f(x) - 1 \Rightarrow f(0) = 1$

Suy ra $f(x+1) = f(x) + 1 \Rightarrow f(0) + 1 = 2$

Như thế $2 = f(1) = f(1 - x + x) = f(1-x) + f(x) - 1$

$\Rightarrow f(1-x) = 3 - f(x)$

Với $x \neq 0$ và $x \neq 1$: $f\left(\frac{1-x}{x}\right) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \frac{f(x)}{x} = 1$ (1)

Lại có $f\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{1-x}{x} f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1-x}{x} f\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)$

Chú ý rằng $f\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{f(1-x)}{1-x} - 1 = \frac{3 - f(x)}{1-x} - 1$

Vậy $f\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{2 - f(x) + x}{x}$ (2)

Từ (1) và (2): $f(x) = x + 1$

Thử lại ta thấy hàm số trên thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 6: *(... điểm)*

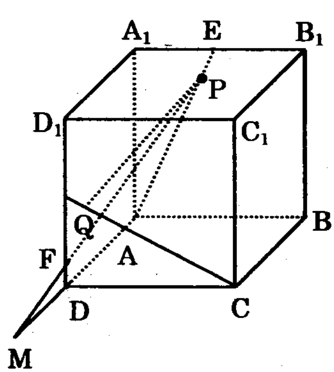
Hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh dài bằng 1. Trên phần kéo dài về phía D của cạnh AD chọn một điểm M sao cho $AM = \sqrt{\frac{8}{5}}$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh A_1B_1 và DD_1. Tỷ số $\frac{MP}{PQ}$ đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu khi P và Q lần lượt nằm trên các đoạn AE và CF.

Đáp án

Chọn cơ sở $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ với $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Khi đó $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$. $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{a}.\vec{c} = \vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP}$ (1)



$P \in AE \Rightarrow \exists\, \alpha,\ 0 \le \alpha \le 1$: $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AE}$

$= \alpha\left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)$

$\overrightarrow{MA} = -\sqrt{\frac{8}{5}}\overrightarrow{AD} = -\sqrt{\frac{8}{5}}\vec{b}$

(1) $\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\alpha\vec{a} - \sqrt{\frac{8}{5}}\vec{b} + \alpha\vec{c}$

$$MP^2 = \frac{5}{4}\alpha^2 + \frac{8}{5}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FQ} = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{FQ} \ (2)$$

$$Q \in FC \Rightarrow \exists\beta,\ 0 \le \beta \le 1 : \overrightarrow{FQ} = \beta\overrightarrow{FC} = \beta\left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$(2) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \left(\beta - \frac{1}{2}\alpha\right)\vec{a} + \vec{b} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta - \alpha\right)\vec{c};$$

$$PQ^2 = 5\left(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{5}{4}\alpha^2 - \alpha + \frac{24}{20} \ge \frac{5}{4}\alpha^2 - \alpha + \frac{6}{5} > 0.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{10} = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{5},\ 0 \le \beta \le 1$

Tỷ số $\frac{MP}{MQ}$ max $\Leftrightarrow \frac{MP^2}{PQ^2}$ max.

$$\frac{MP^2}{MQ^2} \le \frac{MP^2}{\frac{5}{4}\alpha^2 - \alpha + \frac{6}{5}} = \frac{25\alpha^2 + 32}{25\alpha^2 - 20\alpha + 24}$$

Xét $f(\alpha) = \frac{25\alpha^2 + 32}{25\alpha^2 - 20\alpha + 24};\ 0 \le \alpha \le 1$

$$f'(\alpha) = \frac{20\left(-25\alpha^2 - 20\alpha + 32\right)}{\left(25\alpha^2 - 20\alpha + 24\right)^2};\ 0 \le \alpha \le 1$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -25\alpha^2 - 20\alpha + 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{4}{5} \in [0;\ 1] \\ \alpha = -\frac{8}{5} \notin [0;\ 1] \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

α	0		$\frac{4}{5}$		1
$f'(\alpha)$		+		−	
$f(\alpha)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

Với $\alpha = \frac{4}{5}$ **thì** $\mathrm{Max} f(\alpha)$ **là** $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{48}{24} = 2$

Do đó $\frac{MP^2}{PQ^2} \le 2 \Rightarrow \frac{MP}{PQ} \le \sqrt{2}$. **Vậy** $\mathrm{Max}\frac{MP}{PQ} = \sqrt{2}$.

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – TP. HỒ CHÍ MINH

Câu 1: *(3 điểm)*

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5\left(z+\dfrac{1}{z}\right) \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$$

Đáp án

Ta có hệ $\begin{cases} 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5\left(z+\dfrac{1}{z}\right) & (1) \\ xy+yz+zx=1 & (2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{3(x^2+1)}=\dfrac{y}{4(y^2-1)}=\dfrac{z}{5(z^2-1)} & (3) \\ xy+yz+zx=1 & (4) \end{cases}$$

Nhận xét: các thành phần nghiệm của hệ cùng dấu (suy ra từ (3)). Nếu hệ (1) có nghiệm dương (x_0, y_0, z_0), thì $(-x_0, -y_0, -z_0)$ cũng là một nghiệm của hệ.

Vì thế trước hết ta chỉ cần tìm nghiệm dương của hệ (3), (4) *0,5đ*

Đặt $x = \tan\dfrac{A}{2}$; $y = \tan\dfrac{B}{2}$; $z = \tan\dfrac{C}{2}$ như vậy $0 < A, B, C < 180^0$

Từ (4) ta có: $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$ hay

$$\tan\frac{A}{2}\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}=\frac{1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}}{\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}}=\cot\frac{B+C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^0 \Rightarrow A+B+C=180^0$$ *0,5đ*

Vậy có thể coi A, B, C là ba góc của một tam giác.

Mặt khác từ (3) ta có:

$$\frac{\tan\frac{A}{2}}{3\left(1+\tan^2\frac{A}{2}\right)}=\frac{\tan\frac{B}{2}}{4\left(1+\tan^2\frac{B}{2}\right)}=\frac{\tan\frac{C}{2}}{5\left(1+\tan^2\frac{C}{2}\right)}$$

hay $\frac{\sin A}{3}=\frac{\sin B}{4}=\frac{\sin C}{5}$ (5) *0,5đ*

Theo định lí hàm số sin, ta suy ra $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$ trong đó a, b, c là ba cạnh đối diện của ba góc A, B, C.

Từ đó suy ra $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow C = 90^0 \Rightarrow z = \tan\frac{C}{2}=1$. *0,5đ*

Từ (5) suy ra $\sin A = \frac{3}{5}\sin C=\frac{3}{5}$ nên:

$$x=\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}}=\frac{1}{3}$$

$$y=\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}}=\frac{1}{2}$$

Vậy $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};1\right)$ và do đó $\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2};-1\right)$ cũng là nghiệm của hệ (1) (2). *1đ*

Câu 2: ***(3 điểm)***

Gọi A là tập hợp gồm 25 số nguyên dương đầu tiên

$A = \{1, 2, 3..., 24, 25\}$

Chứng minh rằng với mọi tập con B gồm 17 phần tử của A thì luôn luôn tồn tại hai phần tử (phân biệt) của B có tích là một số chính phương.

Đáp án

Gọi C = A\B, vậy C gồm: 25 – 17 = 8 phần tử.

Xét các số chính phương thuộc A (5 số) 1, 4, 9, 16, 25.

Nếu B chứa (ít nhất) hai trong 5 số này, thì B có tính chất phải tìm.

0,5đ

Giả sử B không chứa, hoặc cùng lắm là chứa một trong 5 số trên, vậy C không chứa ít trong 5 số đó. Loại các số đó ra khỏi C, ta được tập C_1 chứa không quá 4 phần tử. *0,5đ*

Xem các cặp số

(I) (3, 12), (5, 20), (6, 24)

(II) (2, 8), (2, 18), (8, 18)

Nếu C_1 không chứa hơn hai số trong sáu số ở 3 cặp (I), thì B chứa một cặp số (I) và có tính chất phải tìm. *1đ*

Giả sử C_1 chứa 3 số trong 6 số ở ba cặp (I), loại 3 số đó khỏi C_1, ta được tập C_2 không chứa hơn một phần tử. *0,5đ*

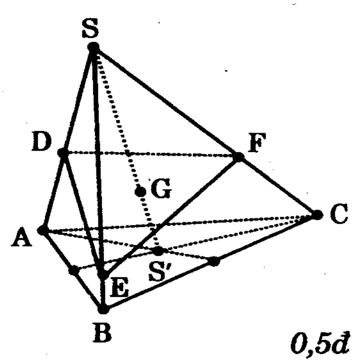
Xét ba cặp số (II) trong đó chỉ tham gia ba số: 2, 8, 18. Cùng lắm chỉ có một số thuộc C_2, vậy còn hai số thuộc B, lập thành một cặp và B có tính chất phải tìm. Tóm lại ta luôn tìm được tập B thỏa mãn yêu cầu bài toán. *0,5đ*

Câu 3: *(4 điểm)*

Cho tứ diện SABC với SA = SB = SC = 1. Mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện, cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại D, E, F. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{SD.SE} + \frac{1}{SE.SF} + \frac{1}{SF.SD}$$

Đáp án



Vì G là trọng tâm của tứ diện SABC nên đường thẳng SG đi qua trọng tâm S' của tam giác đáy ABC và ta có hệ thức: $\overrightarrow{SG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SS'}$, hay:

$$4\overrightarrow{SG} = 3\overrightarrow{SS'} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} \qquad \textit{0,5đ}$$

Từ đó ta được:

$$4\overrightarrow{SG} = \frac{SA}{SD}\overrightarrow{SD} + \frac{SB}{SE}\overrightarrow{SE} + \frac{SC}{SF}\overrightarrow{SF} \qquad \textit{0,5đ}$$

Theo giả thiết SA = SB = SC = 1 nên

$$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{SD}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{SE}\overrightarrow{SE} + \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}\right) \quad (1) \qquad \textit{0,5đ}$$

Lại có $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SF})$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(\frac{1}{4SD} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{SD} + \left(\frac{1}{4SE} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{SE} + \left(\frac{1}{4SF} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{SF} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \frac{1}{SD}+\frac{1}{SE}+\frac{1}{SF}=4 \quad (*)$$ *1đ*

Từ (*) suy ra: $\frac{1}{SD.SE}+\frac{1}{SE.SF}+\frac{1}{SD.SF}$

$$\leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{SD}+\frac{1}{SE}+\frac{1}{SF}\right)^2=\frac{16}{3}$$ *0,5đ*

Vậy ta được:

$$P_{max}=\frac{16}{3} \Leftrightarrow SD=SE=SF=\frac{3}{4}$$

$\Leftrightarrow G \in mp(DEF) // mp(ABC)$ *1đ*

Câu 4: ***(3 điểm)***

Cho $x>0$ chứng minh $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)<\frac{1}{x}+\ln x$.

Đáp án

Xét hàm số $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x-\frac{1}{x}$ với $x>0$

Thì $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{x^2\sqrt{1+x^2}}>0$ *0,5đ*

Vậy f(x) là hàm đồng biến khi $x>0$.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right]=0$ *0,5đ*

(do tính liên tục của hàm số logarit);

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right]-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

điều này chứng tỏ hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang là $y=0$ *1đ*

Ta thấy $y=f(x)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$, và có tiệm cận ngang khi $x\to+\infty$. *0,5đ*

Vậy $f(x)<0$ với mọi $x>0$ hay $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)<\ln x+\frac{1}{x}$ *0,5đ*

Câu 5: ***(4 điểm)***

Cho dãy (a_n), $n \in N$ được xác định bởi:

$$a_0=2;\ a_{n+1}=4a_n+\sqrt{15a_n^2-60}.$$

Hãy xác định số hạng tổng quát của a_n. Chứng minh rằng $\frac{1}{5}(a_{2n} + 8)$ có thể biểu diễn thành tổng bình phương ba số nguyên liên tiếp với mọi $n \geq 1$.

Đáp án

Theo bài ra ta có: $a_{n+1}^2 - 8a_na_{n+1} + a_n^2 + 60 = 0$ (1)

Thay n bởi n – 1 ta được: $a_n^2 - 8a_{n-1}a_n + a_{n-1}^2 + 60 = 0$ (2) *0,5đ*

Trừ (1) cho (2) được: $a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 + 8a_{n-1}a_n - 8a_na_{n+1} = 0$

Hay $(a_{n+1} - a_{n-1})(a_{n+1} - 8a_n + a_{n-1}) = 0$ *0,5đ*

Dễ thấy từ $a_{n+1} > 4a_n > 16a_{n-1}$ suy ra $(a_{a+1} - a_{n-1}) > 0$.

Do đó $a_{n+1} - 8a_n + a_{n-1}$ *0,5đ*

Phương trình đặc trưng có dạng: $t^2 - 8t + 1 = 0$

Với hai nghiệm $t_{1,2} = 4 \pm \sqrt{15}$. Ta xác định được công thức tổng quát của dãy $\{a_n\}$ là $a_n = (4+\sqrt{15})^n + (4-\sqrt{15})^n$. *0,5đ*

Bây giờ ta chứng minh $\frac{1}{5}(a_{2n} + 8)$ luôn được biểu diễn dưới dạng tổng bình phương của 3 số nguyên liên tiếp.

Thật vậy, với mỗi $n \geq 1$, thì $\exists\, k \in \mathbb{N}$ để

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^n - \left(4-\sqrt{15}\right)^n = \sqrt{15}k$$

$$\Rightarrow \left(\left(4+\sqrt{15}\right)^n - \left(4-\sqrt{15}\right)^n\right)^2 = 15k^2$$

hay $\left(4+\sqrt{15}\right)^{2n} - \left(4-\sqrt{15}\right)^{2n} = 15k^2 + 2$ *1đ*

Do vậy: $\frac{1}{5}(a_{2n} + 8) = \frac{1}{5}\left(\left(4+\sqrt{15}\right)^{2n} + \left(4-\sqrt{15}\right)^{2n} + 8\right)$

$= 3k^2 + 2 = (k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2.$ *1đ*

Câu 6: *(3 điểm)*

Tìm tất cả các giá trị nguyên của biểu thức $\dfrac{12 - 6x}{16x^4 - 219x + 249}$, trong đó x là biến số thực.

Đáp án

Ta có: $16x^4 - 219x + 249 = (4x^2 - 7)^2 + 56x^2 - 219x + 200$ *0,5đ*

Mà $56x^2 - 219x + 200 > 0$ (do $\Delta < 0$)

Do đó $16x^4 - 219x + 249 > 0$ ($\forall$ x) *0,5đ*

Đặt $f(x) = \dfrac{12 - 6x}{16x^4 - 219x + 249}$

Ta chứng minh

a) $f(x) \le 2 \Leftrightarrow 16x^4 - 216x + 243 \ge 0 \Leftrightarrow (4x^2 - 9)^2 + 18(2x - 3)^2 \ge 0$.

Dấu bằng xảy ra khi: $x = \dfrac{3}{2}$. *0,5đ*

b) $f(x) > -1 \Leftrightarrow 16x^4 - 225x + 261 > 0$

$\Leftrightarrow (4x^2 - 9)^2 + 72x^2 - 225x + 180 > 0$ đúng vì tam thức

$72x^2 - 225x + 180$ có $\Delta = -1215 < 0$. *0,5đ*

Vậy $-1 < f(x) \le 2$. Với $x = 2$ thì $f(x) = 0$. Hàm f(x) liên tục nên đi qua tất cả các giá trị trong [0, 2]. Vậy $\exists$ x để $f(x) = 1$. Như vậy tất cả các giá trị nguyên của f(x) là 0, 1, 2. *1đ*

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN LỚP 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 1: *(3 điểm)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x = \sqrt{1 + \dfrac{y+1}{x}} \\ y = \sqrt{1 + \dfrac{z+1}{y}} \\ z = \sqrt{1 + \dfrac{x+1}{z}} \end{cases}$

Đáp án

Nhận xét: x, y, z > 1. Khi đó hệ phương trình tương với

$$\begin{cases} y = x^3 - x - 1 \\ z = y^3 - y - 1 \\ x = z^3 - z - 1 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - t - 1$ trên $(1; +\infty)$. Ta có $f'(t) = 3t^2 - 1 > 0$, $\forall t \in (1; +\infty) \Rightarrow f$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

Không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow y \geq z$

$$\Rightarrow f(y) \geq f(z) \Rightarrow z \geq x \Rightarrow x = y = z$$

$$\Rightarrow x = y = z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Thử lại ta có nghiệm của hệ là

$$x = y = z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Câu 2: *(3 điểm)*

Có bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số khác nhau đôi một, trong đó các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 được xếp theo thứ tự tăng dần từ trái sang phải nhưng các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 thì không được xếp như vậy.

Đáp án

Gọi số tự nhiên có 10 chữ số là $a_1a_2 \ldots a_{10}$ (a_1 khác 0)

Theo yêu cầu của bài toán thì các chữ số 1, 2, 3, 4 và 6 phải đứng trước chữ số 5 nên chữ số 5 chỉ có thể ở các vị trí a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}.

Ta xét lần lượt từng vị trí của chữ số 5, rồi đến vị trí của số 6, rồi vị trí của bộ (1, 2, 3, 4) và cuối cùng là vị trí các chữ số còn lại.

Trường hợp $a_{10} = 5$.

Chữ số 6 có 9 vị trí, bộ (1, 2, 3, 4) có C_8^4 vị trí và bốn chữ số 0, 7, 8, 9 có 4! vị trí, như vậy tất cả có $9.C_8^4.4!$ cách sắp xếp kể cả khi $a_1 = 0$.

Ta sẽ bỏ đi các trường hợp $a_1 = 0$ (có $8.C_7^4.3!$ cách sắp xếp).

Như vậy, trong trường hợp này có $9C_8^4.4! - 8C_7^4.3!$ số.

Trường hợp $a_9 = 5$ ta có $8C_7^4.4! - 7C_6^4.3!$ số.

Trường hợp $a_8 = 5$ ta có $7C_6^4.4! - 6C_5^4.3!$ số.

Trường hợp $a_7 = 5$ ta có $6C_5^4.4! - 5C_4^4.3!$ số.

Trường hợp $a_6 = 5$ ta có $5C_4^4.4!$ số.

Cộng các kết quả trên ta có đáp số là 22680 số.

Câu 3: *(4 điểm)*

Cho tứ diện OABC có $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA} = 180^0$. Gọi OA_1, OB_1, OC_1 theo thứ tự là đường phân giác trong của các tam giác OBC, OCA, OAB. Gọi OA_2, OB_2, OC_2 theo thứ tự là đường phân giác của các tam giác OAA_1, OBB_1, OCC_1. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{AA_1}{A_2A_1}\right)^2 + \left(\frac{BB_1}{B_2B_1}\right)^2 + \left(\frac{CC_1}{C_2C_1}\right)^2 \geq (2+\sqrt{3})^2$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Đáp án

Đặt OA = a, OB = b, OC = c, $\widehat{BOC} = \alpha$, $\widehat{COA} = \beta$, $\widehat{AOB} = \gamma$.

Ta có $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác OAA_1, ta có:

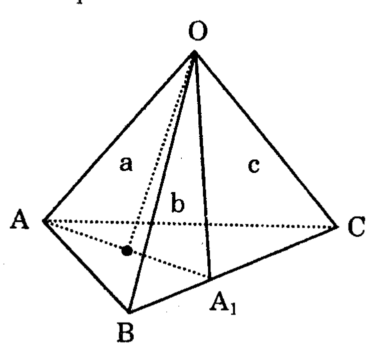
$$\frac{AA_2}{A_2A_1} = \frac{OA}{OA_1} = \frac{a}{OA_1} \Rightarrow \frac{AA_1}{A_2A_1} = 1 + \frac{a}{OA_1}$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{BB_1}{B_2B_1} = 1 + \frac{b}{OB_1}, \quad \frac{CC_1}{C_2C_1} = 1 + \frac{c}{OC_1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AA_1}{A_2A_1}\right)^2 + \left(\frac{BB_1}{B_2B_1}\right)^2 + \left(\frac{CC_1}{C_2C_1}\right)^2$$

$$= \left(1 + \frac{a}{OA_1}\right)^2 + \left(1 + \frac{b}{OB_1}\right)^2 + \left(1 + \frac{c}{OC_1}\right)^2$$



$$\geq \frac{1}{3}\left(3+\frac{a}{OA_1}+\frac{b}{OB_1}+\frac{c}{OC_1}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(3+3\sqrt[3]{\frac{abc}{OA_1.OB_1.OC_1}}\right)^2$$

Áp dụng công thức tính độ dài phân giác ta có

$$OA_1.OB_1.OC_1 = \frac{8a^2b^2c^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Mà $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ và $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ nên suy ra

$$\frac{abc}{OA_1OB_1OC_1} \geq \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

Suy ra $\left(\frac{AA_1}{A_2A_1}\right)^2+\left(\frac{BB_1}{B_2B_1}\right)^2+\left(\frac{CC_1}{C_2C_1}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(3+3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = (2+\sqrt{3})^2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=b=c \\ \alpha=\beta=\gamma=60^0 \end{cases}$ hay OABC là tứ diện đều.

Câu 4: *(3 điểm)*

Cho x, y, z ≥ -1 thỏa mãn $x + y + z = 1$.

Chứng minh $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} \leq \frac{9}{10}$

Đáp án

* Nếu x, y, z $\geq -3/4$ thì ta có

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{3}{50}+\frac{18x}{25} \Leftrightarrow 36\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\left(x+\frac{3}{4}\right) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Chứng minh tương tự ta có $\frac{y}{1+y^2} \leq \frac{3}{50}+\frac{18y}{25}$ và $\frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3}{50}+\frac{18z}{25}$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} \leq \frac{9}{50}+\frac{18(x+y+z)}{25} = \frac{9}{10}$$

* Nếu tồn tại ít nhất một trong ba số x, y, z $\in \left[-1;-\frac{3}{4}\right]$ giả sử là x thì $y + z = 1 - x \leq 2$

Ta có $g(y, z) = \frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} = \frac{1-x+yz(1-x)}{(1-x)^2+(yz-1)^2} \leq \frac{2+1.2}{(1+\frac{3}{4})^2} = \frac{64}{49}$

Hàm $h(x) = \frac{x}{1+x^2}$ đồng biến trên $\left[-1; -\frac{3}{4}\right]$

suy ra $h(x) \le h(-\frac{3}{4}) = -\frac{12}{25}$

$$\Rightarrow h(x) + g(y, z) \le \frac{64}{49} - \frac{12}{25} < \frac{9}{10}$$

Câu 5: *(4 điểm)*

Chứng minh rằng với mọi a, b phương trình

$a(25\sin 5x - \sin x) + b(49\sin 7x - 9\sin 3x) = 0$ có ít nhất 7 nghiệm trên $[0; 2\pi]$.

Đáp án

Nhận xét rằng các hàm lượng giác sinx, cosx luôn có đạo hàm trên R

Xét hàm số $f(x) = a(-\sin 5x + \sin x) + b(-\sin 7x + \sin 3x)$

Ta có $f(0) = f(\pi/2) = f(\pi) = f(3\pi/2) = f(2\pi)$

Theo định lý Roll, phương trình $f'(x) = a(-5\cos 5x + \cos x) + b(-7\cos 7x + 3\cos 3x) = 0$ có các nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa $0 < x_1 < \pi/2 < x_2 < \pi < x_3 < 3\pi/2 < x_4 < 2\pi$.

Mặt khác ta thấy phương trình này còn có 2 nghiệm nữa là $\pi/2$ và $3\pi/2$.

Theo định lý Roll, phương trình

$f''(x) = a(25\sin 5x - \sin x) + b(49\sin 7x - 9\sin 3x) = 0$ có các nghiệm y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 thỏa $0 < x_1 < y_1 < \pi/2 < y_2 < x_2 < y_3 < x_3 < y_4 < 3\pi/2 < y_5 < x_4 < 2\pi$.

Mặt khác ta thấy phương trình này còn có 2 nghiệm nữa là 0 và 2π.

Câu 6: *(3 điểm)*

Tìm tất cả các hàm số $f: R \to R$ thỏa mãn $f(fx) + y) = 2x + f(f(f(y) - x)$ với mọi $x, y \in R$.

Đáp án

$$f\left(f\left(x\right) + y\right) = 2x + f\left(f\left(f(y)\right) - x\right) \quad (*)$$

Cho $y = 0$ ta được $f(f(x)) = 2x + f(f(f(0)) - x)$ (1)

Cho $x = 0$ trong (1) ta được $f(f(0)) = f(f(f(0)))$ (2)

Trong (1), cho $x = f(f(0))$, ta được $f(f(f(f(0)))) = 2f(f(0)) + f(0)$

Áp dụng (2) cho ta $f(f(0)) = 2f(f(0)) + f(0) \Rightarrow f(f(0)) = -f(0)$

$$\Rightarrow f^{(k)}(0) = -f(0) \text{ với } k = 2, 3, 4, ...$$

Trong (*), cho $x = 0$ và $y = -f(0)$ ta được

$$f(0) = f(f(f(-f(0)))) = f^{(5)}(0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Khi đó (1) trở thành $f(f(x)) = 2x + f(-x)$ (3)

Trong (*) cho $x = 0$ ta được $f(y) = f(f(f(y)))$ (4)

Trong (3), cho $x = f(y)$ ta được $f(f(f(y))) = 2f(y) + f(-f(y))$

$$\Rightarrow f(-f(y)) = -f(y)$$

Trong (*), cho $y = -f(x)$ ta được

$$0 = 2x + f(f(f(-f(x))) - x) = 2x + f(f(-f(x))-x) = 2x + f(-f(x) -x)$$

Với mọi số thực b bất kì bằng cách chọn $a = -f(-b/2) + b/2$ ta có $f(a) = b$.

Kết hợp với (4), ta được $b = f(f(b))$.

Trong (3), $x = -b$ ta được $-b = -2b + f(b)$ hay $f(b) = b$ với mọi số thực b.

Từ đó ta có $f(x) = x$ với mọi số thực x.

Ta thấy rằng hàm này thỏa mãn điều kiện của bài toán và đó là hàm duy nhất.

MỤC LỤC

PHẦN I

TOÁN 10

PHẦN II

TOÁN 11